Def (Erweiterung)

Die Erweiterung von f zu ~~einer soz. Wohlfahrtsfkt~~ F ist def:

$$F(\prec_1, \dots, \prec_n) = \prec \text{ mit } a \prec b \text{ gdw. }$$
$$f(\prec_1^{\{a,b\}}, \dots, \prec_n^{\{a,b\}}) = b \quad \forall a,b \; a \neq b$$

Lemma Falls f eine anreizkomp. und surjektive soz. Entscheidungsfkt. ist, so ist ihre Erweiterung zu F tatsächlich eine soz. Wohlfahrtsfkt.

Bew.: D.h. zu zeigen, dass $\prec$ total, asymmetrisch und transitiv ist.

(1) Totalität: wg. Top-Präferenz gilt: $f(\prec_1^{\{a,b\}}, \dots, \prec_n^{\{a,b\}}) = a$ oder $= b$, deshalb $a \prec b$ oder $b \prec a$ ✓

(2) Asymmetrie: nur eines gilt (s.o.)

(3) Transitivität: Angenommen $\prec$ ist nicht trans.

D.h. es ex. a, b, c mit $a \prec b$, $b \prec c$, $a \not\prec c$ (das gleiche mit $c \prec a$). Sei $S = \{a,b,c\}$ mit ObdA $f(\prec_1^S, \dots, \prec_n^S) = c$. Wg. Monotonie folgt bei schrittweiser Änderung von $\prec_i^{\{a,b,c\}}$ zu $\prec_i^{\{a,c\}}$: $f(\prec_1^{\{a,c\}}, \dots, \prec_n^{\{a,c\}}) = c$. D.h. $a \prec c \Rightarrow$ Widerspruch zur Ann., dass $\prec$ nicht transitiv. □

Lemma (Erweiterungslemma)

Falls f eine anreizkomp., surjektive und nicht-diktatorische soz. Entscheidungsfkt. ist, so erfüllt ihre Erweiterung F Einstimmigkeit, UIA und Nicht-Diktatur.

Bew

(1) Einstimmigkeit: Sei $a \prec_i b$ für alle i. Dann gilt $(\prec_i^{\{a,b\}})^{\{b\}} = \prec_i^{\{a,b\}}$

Wg. Top-Präferenz und Monotonie gilt
$$f(\prec_1^{\{a,b\}}, \dots, \prec_n^{\{a,b\}}) = f((\prec_1^{\{a,b\}})^{\{b\}}, \dots, (\prec_n^{\{a,b\}})^{\{b\}}) = b$$
D.h. $a \prec b$ ✓

(2) UIA: Falls $a \prec_i b$ gdw. $a \prec_i' b$ $\forall i$, dann muss $f(\prec_1^{\{a,b\}}, \dots, \prec_n^{\{a,b\}}) = f(\prec_1'^{\{a,b\}}, \dots, \prec_2'^{\{a,b\}})$ gelten.
Wg. Monotonie können wir schrittweise $\prec_i^{\{a,b\}}$ in $\prec_i'^{\{a,b\}}$ ändern, ohne dass sich das Ergebnis von $f(\,)$ ändert.

(3) Nicht-Diktatur: Sei f nicht-diktatorisch, aber F ist diktatorisch, d.h. $a \prec b$ falls $a \prec_i b$ für alle $a, b \in A$ für Diktator i. Dann gilt $f(\prec_1, \dots, \prec_i, \dots \prec_n) = b$ falls $a \prec_i b$ $\forall a \neq b$. Widerspruch.

Satz (Gibbard-Satterthwaite)

Falls f eine anreizkomp. und surjektive soz. Entscheidungsfkt. über mehr als 2 Alternativen ist, so ist f diktatorisch.

Bew: Reduktion auf Arrow.

$$\boxed{\text{Mechanismus + Mechanismusdesign}}$$