(3) Sei $a=d$ oder $b=c$.

OBdA $b=c$. D.h. unsre Beh. lautet dann

$a <_i b$ gdw. $\overset{(c)}{b} <_i' d$ impliziert $a < b$ gdw $\overset{(c)}{b} <' d$

Konstr.: $<_i^c$: $x <_i y$ gdw. $y <_i^c x$.

$b <_i^c a$ gdw. $b <_i' d$ impliziert $b <^c a$ gdw. $b <' d$

Mit (1) folgt das (da $b \neq d$ und $a \neq b$)

Mit (2) aus Vor. folgt: $a < b$ gdw. $b <^c a$

Es folgt: $a < b$ gdw. $b <' d$ $\square$

__Bew.__ (Arrow): Betrachte $a, b \in A$ und konst. Folge von Profilen Π_i, so dass in Π_i genau die ersten i Wähler b vor a präferieren: $a \prec_j b$ gdw. $j \leq i$

minimaler Index i^* mit $a \prec^{i^*} b$

	wähle Π_0	Π_{i^*-1}	Π_{i^*}	Π_n
1	$b <_1 a$	$a <_1 b$	$a <_1 b$	$a <_1 b$
2	$b <_2 a$	$a <_2 b$		$a <_2 b$
i_*-1		$a <_{i^*-1} b$		
i^*		$b <_{i^*} a$	$a <_{i^*} b$	
		$\vdots$	$b <_{i^*+1} a$ $\vdots$	
n	$b <_n a$	$b <_n a$	$b <_n a$	$a <_n b$
	$F(\Pi^0) = \prec^0$			$F(\Pi^n) = \prec^n$
	$b \prec^0 a$	$b <^{i^*-1} a$	$\underline{a <^{i^*} b}$	$a \prec_n b$

Wir werden zeigen, dass i^* ein Diktator ist!

Sei $c, d \in A$ mit $c \neq d$. Wir zeigen $\underline{c <_{i^*} d}$ impliziert $c < d$ für $F(<_1, \dots, <_{i^*}, \dots, <_n) = <$.

Sei $e \neq c, d$ und konstr. $\Pi' = <_1', \dots, <_n'$ mit

für $j < i^*$:	$e <_j' c <_j' d$	falls $c <_j d$	$e <_j' d$
	$e <_j' d <_j' c$	falls $d <_j c$	$\underline{e <_j' c}$
für $j = i^*$:	$c <_j' e <_j' d$	falls $c <_j d$ $\Leftarrow$	$e <_j' d$, $c <_j' e$
	$d <_j' e <_j' c$	falls $d <_j c$	
für $j > i^*$:	$c <_j' d <_j' e$	falls $c <_j d$	$d <_j' e$
	$d <_j' c <_j' e$	falls $d <_j c$	$c <_j' e$

$F(<_1', \dots, <_n') = <'$. Wg $\underline{\text{UIA}}$ gilt $\underline{c <' d \text{ gdw. } c < d}$

Für (e, d) sind die Präf in $<_1', \dots, <_n'$ die gleichen wie in Π^{i^*} für (a, b). D.h. mit PN folgt: $\boxed{e <' d}$

Für (e, c) sind die Präf in $<_1', \dots, <_n'$ die gleiche wie Π^{i^*-1} für (a, b). D.h. mit PN: $\boxed{c <' e}$

Mit Transitivität folgt dann $c <' d$, und UIA folgt dann $\boxed{c < d}$!

Verletzt ist bei allen Wahlverfahren die UIA!

Vielleicht ist das Ganze kein Problem bei soz. Entscheidungsfkt.

Resultat von Gibbard und Satterthwaite

Intuitiv: Jede surjektive soz. Entscheidungsfkt. über mehr als 2 Alternativen kann durch Angabe falscher Präferenzen manipuliert werden.

Def (Manipulation)

Eine soz. Entscheidungsfkt. f heißt manipulierbar falls $\prec_1, \dots, \prec_i, \dots, \prec_n, \prec_i'$ ex., so dass $a \prec_i b$, $a = f(\prec_1, \dots, \prec_i, \dots, \prec_n)$ und $b = f(\prec_1, \dots, \prec_i', \dots, \prec_n)$.

Def (anreizkompatibel)

f heißt anreizkompatibel gdw. f nicht manipulierbar ist.

Wenn die Wähler als Spieler gesehen werden, dann bedeutet Anreizkompatibilität, dass eine dominante Strategie für jeden Spieler gibt: wahre Präferenzen angeben!

Def (Monotonie)

f ist monoton falls aus $f(<_1, \dots, <_i, \dots, <_n) = a$ und $f(<_1, \dots, <'_i, \dots, <_n) = b$ und $a \neq b$ immer folgt, dass $b <_i a$ und $a <'_i b$.

Lemma

f ist monoton gdw. f ist anreizkompatibel.

Def (Diktator)

Wähler i heißt Diktator in f falls für alle $\prec_1, \dots, \prec_i, \dots, \prec_n$ gilt: Aus $b \prec_i \underline{a}$ $\forall b \neq a$ folgt:

$f(\prec_1, \dots, \prec_i, \dots, \prec_n) = \underline{a}$.

Zusammenhang zw. soz. Wohlfahrtsfkt. und Entscheidungsfkt.

Notation. Sei $S \subseteq A$ und $\prec \in L$. Dann sei $\prec^S$ ist die Ordnung, bei der alle $x \in S$ "nach oben" verschoben wurden.

D.h. $\forall a, b \in S$: $a \prec b$ gdw. $a \prec^S b$

$\forall a, b \notin S$: $a \prec b$ gdw. $a \prec^S b$

$\forall b \in S, a \notin S$: $a \prec^S b$

Bsp $S = \{X, Y\}$

$$\prec: \begin{array}{c} A \\ X \\ B \\ Y \\ C \end{array} \qquad \prec^S: \begin{array}{c} X \\ Y \\ A \\ B \\ C \end{array}$$

Lemma (Top Präferenz)

Sei f anreizkompatibel und surjektiv, dann gilt

$f(<_1^S, \dots, <_n^S) \in S$.

Bew: Sei $a \in S$. Da f surjektiv ist, ex. $<_1, \dots, <_n$ mit $f(<_1, \dots, <_n) = a$. Ändere schrittweise für $i = 1, \dots, n$ $<_i$ in $<_i^S$. Dabei kann für ~~kein~~ $b \notin S$ Resultat von f werden, da f monoton ist. $\square$