(3) Sei $a = d$ oder $b = c$.

ObdA $b = c$. D.h. unsere Beh. lautet dann

$a <_i b$ gdw. $b <_i^{(c)} d$ impliziert $a < b$ gdw. $b <^{(c)\prime} d$

konstr.: $<_i^c$: $x <_i y$ gdw. $y <_i^c x$.

$b <_i^c a$ gdw. $b <_i' d$ impliziert $b <^c a$ gdw. $b <' d$

Mit (1) folgt das (da $b \neq d$ und $a \neq b$)

Mit (2) aus Vor. folgt: $a < b$ gdw. $b <^c a$

Es folgt: $a < b$ gdw. $b <' d$ $\square$

Bew. (Arrow): Betrachte $a, b \in A$ und konst. Folge von Profilen Π_i, so dass in Π_i genau die ersten i Wähler b vor a ~~prä~~ präferieren: $a <_j b$ gdw: $j \leq i$

wähle Π_0		Π_{i^*-1}	Π_{i^*}	Π_n
1	$b <_1 a$	$a <_1 b$	$a <_1 b$	$a < b$
2	$b <_2 a$	$a <_2 b$		$a <_2 b$
i_{*-1}		$a <_{i^*-1} b$		
i^*		$b <_{i^*} a$	$a <_{i^*} b$	
			$b <_{i^*} a$	
n	$b <_n a$	$b <_n a$	$b <_n a$	$a <_n b$
	$F(\Pi^0) = <^0$			$F(\Pi^n) = <^n$
	$b <^0 a$	$b <^{i^*-1} a$	$a <^{i^*} b$	$a <_n b$

minimaler Index i^* mit $a <^{i^*} b$

Wir werden zeigen, dass i^* ein Diktator ist!

Sei $c, d \in A$ mit $c \neq d$. Wir zeigen $c <_{i^*} d$ impliziert $c < d$ für $F(<_1, \dots, <_{i^*}, \dots, <_n) = <$.

Sei $e \neq c, d$ und konstr. $\Pi' = <_1', \dots, <_n'$ mit

für $j < i^*$: $e <_j' c <_j' d$ falls $c <_j d$ $\quad e <_j' d$
$\quad e <_j' d <_j' c$ falls $d <_j c$ $\quad e <_j' c$

für $j = i^*$: $c <_j' e <_j' d$ falls $c <_j d$ $\quad e <_j' d$
$\quad d <_j' e <_j' c$ falls $d <_j c$ $\quad c <_j' e$

für $j > i^*$: $c <_j' d <_j' e$ falls $c <_j d$ $\quad d <_j' e$
$\quad d <_j' c <_j' e$ falls $d <_j c$ $\quad c <_j' e$

$F(<_1', \dots, <_n') = <'$. Wg UIA gilt $c <' d$ gdw. $c < d$

Für (e, d) sind die Präf in $<_1', \dots, <_n'$ die gleichen wie in Π^{i^*} für (a, b). D.h. mit PN folgt: $\boxed{e <' d}$

Für (e, c) sind die Präf in $<_1', \dots, <_n'$ die gleiche wie Π^{i^*-1} für (a, b). D.h. mit PN: $\boxed{c <' e}$

Mit Transitivität folgt dann $c <' d$, und UIA folgt dann $\boxed{c < d}$! $\square$

Verletzt ist bei allen Wahlverfahren die UIA!

Vielleicht ist das Ganze kein Problem bei soz. Entscheidgsfkt.

Resultat von Gibbard und Satterthwaite

Intuitiv: Jede surjektive soz. Entscheidgsfkt. über mehr als 2 Alternativen kann durch Angabe falscher Präferenzen manipuliert werden.

Def (Manipulation)

Eine soz. Entscheidgsfkt. f heißt manipulierbar falls $<_1, \dots, <_i, \dots, <_n$, $<_i'$ ex., so dass $a <_i b$, $a = f(<_1, \dots, <_i, \dots, <_n)$ und $b = f(<_1, \dots, <_i', \dots, <_n)$.

Def (anreizkompatibel)

f heißt **anreizkompatibel** gdw. f nicht manipulierbar ist.

Wenn die Wähler als Spieler gesehen werden, dann bedeutet Anreizkompatibilität, dass eine dominante Strategie für jeden Spieler gibt: wahre Präferenzen angeben!

Def (Monotonie)

f ist monoton falls aus $f(<_1, \dots, <_i, \dots, <_n) = a$ und $f(<_1, \dots, <_i', \dots, <_n) = b$ und $a \neq b$ immer folgt, dass $b <_i a$ und $a <_i' b$.

Lemma

f ist monoton gdw. f ist anreizkompatibel.

Def (Diktator)

Wähler i heißt Diktator in f falls für alle $<_1, \dots, <_i, \dots, <_n$ gilt: Aus $b <_i a \;\forall b \neq a$ folgt: $f(<_1, \dots, <_i, \dots, <_n) = a$.

Zusammenhang zw. soz. Wohlfahrtsfkt. und Entscheidungsfkt.

Notation. Sei $S \subseteq A$ und $< \in L$. Dann sei $<^S$ ist die Ordnung, bei der alle $x \in S$ "nach oben" verschoben wurde.

D.h. $\forall a,b \in S$: $a < b$ gdw. $a <^S b$

$\forall a,b \notin S$: $a < b$ gdw. $a <^S b$

$\forall b \in S, a \notin S$: $a <^S b$

Bsp $S = \{X, Y\}$

$<$:	$<^S$:
A	X
X	Y
B	A
Y	B
C	C

Lemma (Top Präferenz)

Sei f anreizkompatibel und surjektiv, dann gilt $f(<_1^S, \dots, <_n^S) \in S$.

Bew: Sei $a \in S$. Da f surjektiv ist, ex. $<_1, \dots, <_n$ mit $f(<_1, \dots, <_n) = a$. Ändere schrittweise für $i = 1, \dots, n$ $<_i$ in $<_i^S$. Dabei kann für kein $b \notin S$ Resultat von f werden, d f monoton ist. $\square$