Arrows Resultat

1) Einstimmigkeit $F(<, \dots, <) = <$

1') part. Einst. Sei $F(<_1, \dots, <_n) = <$ mit $a <_i b \ \forall i$.

Dann soll $a < b$

2) Nicht-diktatorisch: $\nexists i$, so dass $F(<_1, \dots, <_i, \dots, <_n) = <_i$

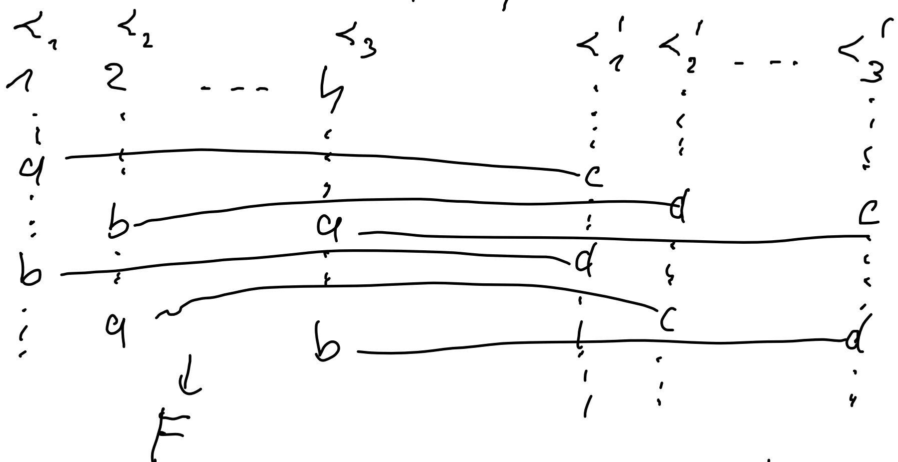
3) UIA: Sei $< = F(<_1, \dots, <_n)$ und $<' = F(<_1', \dots, <_n')$ und $a <_i b$ gdw. $a <_i' b$. Dann: $a < b$ gdw. $a <' b$.

$1' \Rightarrow 1 \qquad 1 + 3 \Rightarrow 1'$

Satz (Arrow) Jede soz. Wohlfahrtsfkt. F über mehr als 2 Alternativen, die Einstimmigkeit und UIA erfüllt, ist diktatorisch.

Lemma (paarweise Neutralität)

Erfülle die soz. Wohlfahrtsfkt. F UIA und Einstimmigkeit und seien $\prec_1, \dots, \prec_n$ und $\prec'_1, \dots, \prec'_n$ Präf. Profile mit $a \prec_i b$ gdw. $c \prec'_i d$. Daraus folgt $a \prec b$ gdw. $c \prec' d$ für $\prec = F(\prec_1, \dots, \prec_n)$ und $\prec' = F(\prec'_1, \dots, \prec'_n)$.



$$a \prec b \dashrightarrow c \prec' d$$

$$b \prec a \dashrightarrow d \prec' c$$

Bew:

Fall (1): $a \neq d$, $b \neq c$

Ann: $\boxed{a < b}$ (ansonsten vertausche a und b).

Konstr. $<_1'', \dots, <_n''$ und $\boxed{c <_i'' a}$ und $\boxed{b <_i'' d}$ und die Ordnung von (a,b) kommt aus $<_i$ und die Ordnung von (c,d) aus $<_i'$. D.h.

$\underline{a <_i b}$ (und $c <_i' d$): $\quad \underline{c} \overset{(=)}{<_i''} a <_i'' b \overset{(=)}{<_i''} \underline{d}$

$b <_i a$ (und $d <_i' c$): $\quad b \overset{(=)}{<_i''} d <_i'' \underline{c} \overset{(=)}{<_i''} a$

$F(<_1'', \dots, <_n'') = <''$

wg. Einst.: $\underline{c <'' a}$ und $\underline{b <'' d}$

wg. UIA: $\underline{a <'' b}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{mit Transitivität: } c <'' d}$

wg. UIA: $\boxed{c <' d}$. Rückrichtung analog.

Fall (2): Sei $a = c$ und $b = d$

D.h.: Falls $a <_i b$ gdw. $b <_i' a$ dann $a < b$ gdw. $b <' a$.

Sei $c \neq a, b$

Konstr. $(<_1'', \dots, <_n'')$, so dass c direkt unter b liegt

$a <_i'' c <_i'' b$ oder $c <_i'' b <_i'' a$

d.h. $a <_i b$ gdw. $a <_i'' c$, mit (1): $a < b$ gdw. $a <'' c$

Konstr. $(<_1''', \dots, <_n''')$, so dass b direkt unter a liegt

$b <_i''' a <_i''' c$ oder $c <_i''' b <_i''' a$

d.h. $a <_i'' c$ gdw. $b <_i''' c$: $a <'' c$ gdw. $b <''' c$

Konstr. $(<_1'''', \dots, <_n'''')$

$b <'''' c$ gdw. $b <''' a$

...

$\Rightarrow a < b$ gdw. $b <''' a$

Es folgt mit UA: $a < b$ gdw. $b <' a$. $\square$