Sozialwahltheorie (social choice theory)

→ Aggregation von Einzelpräferenzen
- → politische Wahlen
- → Abstimmungen in Kommission
- → Eurovision Song Contest

Def (soziale Wohlfahrtsfkt. und soziale Entscheidungsfkt.)

A: Menge von Alternativen, L: Menge der linearen Ordnungen über A, n Wähler

$F : L^n \to L$ soz. Wohlfahrtsfkt.

$f : L^n \to A$ soz. Entscheidungsfkt.

Notation: $< \in L$ Präferenzrelation

~~Für~~ Wähler $i = 1, \dots, n$ ist $<_i$ die Präferenzrel von Wähler i

Bsp

$A = \{a, b, c\}$ $i \in \{1, 2\}$

$a \prec_1 b \prec_1 c$, d.h. Wähler 1 bevorzugt c, danach dann b und dann a.

Pluralitätswahl (relative Mehrheitswahl)
(engl: first-past-the-post, winner-takes-all)

Nur Erstpräferenzen, man wählt dann den Kandidaten, der die meisten Stimmen bekommt. Der gewählte Kandidat wird oft nur von einer Minderheit unterstützt.

Pluralitätswahl in 2 Runden

1. Runde: Die Kandidaten mit den meisten Stimmen
2. Runde: Stichwahl

Präferenzwahl mit übertragbaren Stimme

(vgl. Instant Runoff Voting)

Jeder Wähler gibt eine Präferenzliste ab.
Es werden dann in Runden immer die Kandidaten mit den wenigsten Erstpräferenzen eliminiert, bis ein Kandidat die Majorität bei den Erstpräferenzen hat.

Beispiel

23 Wähler	8	6	4	3	1	1
4	e	~~a~~	~~b~~	c	~~d~~	~~a~~
3	~~d~~	~~b~~	c	~~b~~	c	c
2	~~b~~	c	~~d~~	~~d~~	~~a~~	~~b~~
1	c	e	~~a~~	~~a~~	b	e
0	~~a~~	~~d~~	e	e	e	~~a~~

Pluralitätswahlgewinner : e

Pluralitätswahl mit 2 Runde : a

e : 8 + 1 = 9

a : 6 + 4 + 3 + 1 = 14

IRV : c

Borda - Gewinner

→ auch b = 62 Pkt.

e = 4 × 8 + 6 × 1 + 4 × 0 + 3 × 0 + 1 × 0 + 1 × 1 = 39 Pkt.

b > c > d > e > a

Condorcet:

	a	b	c	d	e
a	–	0	0	0	1
b	1	–	1	1	1
c	1	0	–		
d	1	0		–	
e	0	0			–

Condorcet-Gewinner

d(a, b) = 7

d(b, a) = 16

Condorcet-Methode

Jeder Wähler gibt eine Präferenzliste ab.
Es gewinnt der Kandidat, der bei einem paarweisen Vergleich immer gewinnt.

Condorcet-Paradox

$A <_1 B <_1 C$

$B <_2 C <_2 A$

$C <_3 A <_3 B$

	A	B	C
A	/	0	1
B	1	/	0
C	0	1	/

hier gibt es keinen Gewinner

$\boxed{A < B \quad B < C}$ $\quad \underline{C < A}$

Schulze-Methode

Debian, Wikimedia, Piratenpartei, KDE e.V., Gentoo nutzen diese Methode

Condorcet-Methode ergänzt um den Fall, dass es keinen Condorcet-Gewinner gibt.

$d(X,Y)$: die Anzahl der paarweisen Vergleiche, bei denen X gegenüber Y gewonnen hat.

Pfad $C_1, \dots, C_n$ zw. X und Y mit Stärke z gdw.

1. $C_1 = X$
2. $C_n = Y$
3. $d(C_i, C_{i+1}) > d(C_{i+1}, C_i)$ für alle $i = 1, \dots, n-1$
4. $d(C_i, C_{i+1}) \geq z$ für alle $i = 1, \dots, n-1$ und ~~es~~ ex. j mit $d(C_j, C_{j+1}) = z$.

Bsp

$$a \xrightarrow{8} b \xrightarrow{5} c \xrightarrow{\underline{\underline{3}}} d$$

Kette hat Stärke von 3

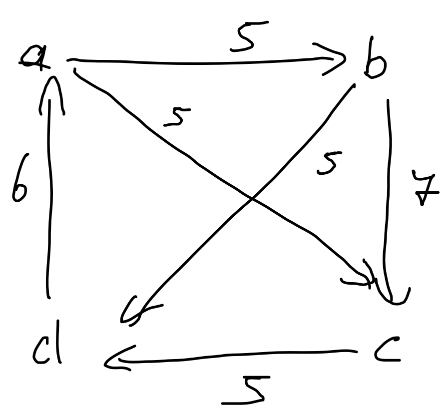
Wir def. $p(X, Y) = z$ als maximales z, so dass es einen Pfad der Stärke z von X nach Y gibt, und $p(X, Y) = 0$ falls kein Pfad ex.

Der Schulze-Gewinner ist der Condorcet-Gewinner, wenn dieser ex., sonst ist ein potentieller Gewinner ein Kandidat A für den gilt, dass $p(A, X) \geq p(X, A)$ für alle $X \neq A$.

3	2	2	2
a	d	d	c
b	a	b	b
c	b	c	d
d	c	a	a

	a	b	c	d
a	–	1	1	0
b	0	–		
c	0		–	
d	1	0		–

d(·,·)	a	b	c	d
a	–	5	5	3
b	4	–	7	5
c	4	2	–	5
d	6	4	4	–



p(·,·)	a	b	c	d
a	–	5	5	5
b	5	–	7	5
c	5	5	–	5
d	6	5	5	–

$p(A,X) \geq p(X,A) \quad \forall X \neq A$

$\rightarrow$ pot. Gewinner b, d.

Borda-Wahl

Jeder Kandidat wird für eine Wahl auf Rang i mit $k-i$ Punkten belohnt, wenn es k Kandidaten gibt. Derjenige mit der höchsten Punktsumme gewinnt.

Arrows Unmöglichkeitsresultat

1. Einstimmigkeit: Für alle $\prec \in L$: $F(\prec, \ldots, \prec) = \prec$

1'. Partielle Einstimmigkeit: Für alle $\prec_1, \ldots, \prec_n, \prec \in L$ mit $F(\prec_1, \ldots, \prec_n) = \prec$ folgt aus $a \prec_i b$ für alle $i = 1, \ldots, n$, dass $a \prec b$.

2. nicht-diktatorisch: Ein Wähler i heißt Diktator für eine soz. Wohlfahrtsfkt. F, falls für alle $\prec_1, \ldots, \prec_n$ gilt $F(\prec_1, \ldots, \prec_i, \ldots, \prec_n) = \prec_i$. F heißt nicht-diktatorisch, falls es keinen Diktator gibt.

3. Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen (UIA): Ob $a \prec b$ gilt, sollte nur von den Präferenzen der Wähler zwischen a und b abhängen.
Für alle $\prec_1, \ldots, \prec_n, \prec'_1, \ldots, \prec'_n \in L$ muss gelten:

Falls $\prec = F(\prec_1, \dots, \prec_n)$ und $\prec' = F(\prec_1', \dots, \prec_n')$ und $a \prec_i b$ gdw. $a \prec_i' b$ für alle $i = 1, \dots, n$, so impliziert das $\underline{a \prec b}$ gdw. $\underline{a \prec' b}$.

<u>Bem</u>: Partielle Einstimmigkeit impliziert Einstimmigkeit.

<u>Satz</u> Aus Einstimmigkeit (1) und UAI (3) folgt partielle Einstimmigkeit (1').

<u>Bew</u>:

Seien $\prec_1, \dots, \prec_n \in L$ mit $a \prec_i b$ für alle i.

Sei $\prec = F(\prec_1, \dots, \prec_n)$. Betrachte $\prec_1', \dots, \prec_n'$, $\prec_i' = \prec_1$ für alle Wähler i, wg. totaler Einstimmigkeit

$\underline{\prec'} = F(\prec_1', \dots, \prec_n') = F(\prec_1, \dots, \prec_1) = \underline{\prec_1}$. D.h. insbesondere $\underline{a \prec' b}$. Wg. $\underline{\text{UAI}}$ muss $\underline{a \prec b}$.