Lemma A: Sei α_d eine Strategie des Verteidigers in einem Sicherheitsspiel, das die SSAS-Eigenschaft erfüllt, und sei $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n) = \varphi(\alpha_d)$ der von α_d induzierte Vektor von Abdeckungswahrscheinlichkeiten. Dann gibt es für jedes $\bar{c}' = (c'_1, \dots, c'_n)$ mit $0 \leq c'_i \leq c_i$ für alle $t_i \in T$ eine Strategie α'_d des Verteidigers, mit $\varphi(\alpha'_d) = \bar{c}'$. $\square$

Satz: Sei α_d eine SSG-Strategie des Verteidigers in einem Sicherheitsspiel mit SSAS-Eigenschaft. Dann

$$\underline{E(\alpha_d)} = E^*. \quad \text{D.h.} \quad \underline{\Omega_{SSE}} \subseteq \Omega_M = \underline{\Omega_{NE}}.$$

$$E^* = \min_{\alpha'_d} \underline{E(\alpha'_d)}$$

Beweis durch Widerspruch: Angenommen, $\langle \alpha_d, g \rangle$ ist SSG-Profil in Sicherheitsspiel mit SSDI-Eigenschaft, und $\boxed{E(\alpha_d) > E^*}$. Sei $T_a = \{ t_i \in T \mid U_a(\alpha_a, t_i) = E(\alpha_a) \}$.

Nach Def. von SSGs (Tiebreaking-Bed.) folgt

$$U_d(\alpha_d, g(\alpha_d)) = \max_{t_i \in T_a} U_d(\alpha_d, t_i).$$

Betrachte nun eine gemischte Strategie α_d^* des Verteidigers mit $E(\alpha_d^*) = E^*$. Ein solches α_d^* muss existieren. Warum?

Dann gilt für alle $t_i \in T_a$, dass $U_a(\alpha_d^*, t_i) \leq E^*$ ⊛

Definiere $\bar{c}'_* = (c'_1, \ldots, c'_n)$:

:

$$c_i' := \begin{cases} c_i^* - \dfrac{E^* - U_a(\alpha_d^*, t_i) + \varepsilon}{U_a^u(t_i) - U_a^c(t_i)} & \text{, falls } t_i \in T_a \\[2em] c_i^* & \text{, falls } t_i \notin T_a \end{cases}$$

wobei $\varepsilon > 0$ eine infinitesimal kleine Konstante ist.

Für alle $t_i \in T_a$ ist (*) $E^* - U_a(\alpha_d^*, t_i) + \varepsilon > 0$, und damit $\boxed{c_i' < c_i^*}$, denn

$$c_i' = c_i^* - \underbrace{\underbrace{\left(E^* - U_a(\alpha_d^*, t_i) + \varepsilon\right)}_{>0} \Big/ \Big(\underbrace{U_a^u(t_i) - U_a^c(t_i)}_{\Delta U_a(t_i) > 0}\Big)}_{>0} < c_i^*.$$

Nach Lemma A existiert ein α_d' mit $\varphi(\alpha_d') = \bar{c}'$
$= (c_1', \ldots, c_n')$.

Mit diesem α_d' gilt für alle $t_i \in T_a$, dass

$$\underline{U_a(\alpha_d', t_i)} \overset{\text{IA}}{=} \underline{E^*} + \underline{\varepsilon} < E(\alpha_d) = \underline{U_a(\alpha_d, t_i)}.$$

Also $\boxed{c_i' > c_i \geq 0.}$

Also folgt für alle $t_i \in T$: $0 \leq c_i' \leq c_i^*$.

Ausgeschrieben:

$$U_a(\alpha_d', t_i) = \begin{cases} E^* + \varepsilon & \text{, falls } t_i \in T_a \\ U_a(\alpha_d^*, t_i) \leq E^* & \text{, falls } t_i \notin T_a \end{cases}$$

Also bleiben Antworten des Angreifers gegen α_d' immer in T_a (wie gegen α_d).

Für alle $t_i \in T_a$ muss wegen $c_i' > c_i$ gelten, dass

$$\boxed{U_d(\alpha_d, t_i) < U_d(\alpha_d', t_i)}.$$

Nach Def. der SSG-Antwortfunktion g des Angreifers:

Tie-Breaking

$$
\begin{aligned}
U_d(\alpha_d', g(\alpha_d')) &= \max_{t_i \in T_a} U_d(\alpha_d', t_i) \\
&> \max_{t_i \in T_a} U_d(\alpha_d, t_i) \\
&= U_d(\alpha_d, g(\alpha_d)).
\end{aligned}
$$

D.h. α'_d für Verteidiger gegen g echt besser als

$\alpha_d \longrightarrow$ ↯ zur Annahme, $\langle \alpha_d, g \rangle$ ist SSG. $\square$

Also: Bei Wahl zw. SSG- und NG-Strategien für Verteidiger ist es ungefährlich, sich auf SSG-Strategien zu beschränken; Außerdem NG-Strategien ununterscheidbar, also keine Gefahr, eine „falsche“ NG-Strategie zu wählen.

Ausblick:

- bei homogenen Ressourcen + klarer Einschränkung der Nutzenfkt: ex. immer eindeutige Minimax-Strategie für Verteidiger, die zugleich eindeutige SSG- und NG-Strategie ist.
- Theorie kann erweitert werden auf mehrere Angreifer-Ressourcen.
- Literatur: Stackelberg vs. Nash in Security Games: An Extended Investigation of Interchangeability, Equivalence, and Uniqueness. JAIR 41 (2011), pp. 297–327, Korzhyk et al.