Lemma A: Sei α_d eine Strategie des Verteidigers in einem Sicherheitsspiel, das die SSAS-Eigenschaft erfüllt, und sei $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n) = \varphi(\alpha_d)$ der von α_d induzierte Vektor von Abdeckungswahrscheinlichkeiten.
Dann gibt es für jedes $\bar{c}' = (c_1', \dots, c_n')$ mit $0 \le c_i' \le c_i$ für alle $t_i \in T$ eine Strategie α_d' des Verteidigers, mit $\varphi(\alpha_d') = \bar{c}'$. □

Satz: Sei α_d eine SSG-Strategie des Verteidigers in einem Sicherheitsspiel mit SSAS-Eigenschaft. Dann $E(\alpha_d) = \underbrace{E^*}_{\min_{\alpha_d'} E(\alpha_d')}$. D.h. $\Omega_{SSE} \subseteq \Omega_M = \Omega_{NE}$.

Beweis durch Widerspruch: Angenommen, $\langle \alpha_d, g \rangle$ ist SSG-Profil in Sicherheitsspiel mit SSAS-Eigenschaft, und $\boxed{E(\alpha_d) > E^*}$. Sei $T_a = \{t_i \in T \mid U_a(\alpha_d, t_i) = E(\alpha_d)\}$.
Nach Def. von SSGs (Tiebreaking-Bed.) folgt

$$U_d(\alpha_d, g(\alpha_d)) = \max_{t_i \in T_a} U_d(\alpha_d, t_i).$$

Betrachte nun eine gemischte Strategie α_d^* des Verteidigers mit $E(\alpha_d^*) = E^*$. Ein solches α_d^* muss existieren. Warum?
Dann gilt für alle $t_i \in T_a$, dass $U_a(\alpha_d^*, t_i) \le E^*$ (*)
Definiere $\bar{c}' = (c_1', \dots, c_n')$:

⋮

$$c_i' := \begin{cases} c_i^* - \dfrac{E^* - U_a(\alpha_d^*, t_i) + \varepsilon}{U_a^u(t_i) - U_a^c(t_i)}, & \text{falls } t_i \in T_a \\[2ex] c_i^*, & \text{falls } t_i \notin T_a \end{cases}$$

wobei $\varepsilon > 0$ eine hinreichend kleine Konstante ist.
Für alle $t_i \in T_a$ ist (*) $E^* - U_a(\alpha_d^*, t_i) + \varepsilon > 0$, und damit $\boxed{c_i' < c_i^*}$, denn

$$c_i' = c_i^* - \underbrace{\underbrace{(E^* - U_a(\alpha_d^*, t_i) + \varepsilon)}_{>0} \,/\, \underbrace{(U_a^u(t_i) - U_a^c(t_i))}_{\Delta U_a(t_i) > 0}}_{>0} < c_i^*.$$

Nach Lemma A existiert ein α_d' mit $\varphi(\alpha_d') = \bar{c}' = (c_1', \dots, c_n')$.

Mit diesem α_d' gilt für alle $t_i \in T_a$, dass

$$U_a(\alpha_d', t_i) \overset{HA}{=} E^* + \varepsilon < E(\alpha_d) = U_a(\alpha_d, t_i).$$

Also $\boxed{c_i' > c_i \ge 0.}$
Also folgt für alle $t_i \in T$: $0 \le c_i' \le c_i^*$.
Angreiferauszahlungen:

$$U_a(\alpha_d', t_i) = \begin{cases} E^* + \varepsilon, & \text{falls } t_i \in T_a \\ U_a(\alpha_d^*, t_i) \le E^*, & \text{falls } t_i \notin T_a \end{cases}$$

Also bleiben Antworten des Angreifers gegen α'_d immer noch T_a (wie gegen α_d).

Für alle $t_i \in T_a$ muss wegen $c'_i > c_i$ gelten, dass

$\boxed{U_d(\alpha_d, t_i) < U_d(\alpha'_d, t_i)}$. Nach Def. der SSG-Antwortfunktion g des Angreifers:

Tie-Breaking

$$U_d(\alpha'_d, g(\alpha'_d)) = \max_{t_i \in T_a} U_d(\alpha'_d, t_i)$$

$$> \max_{t_i \in T_a} U_d(\alpha_d, t_i)$$

$$= U_d(\alpha_d, g(\alpha_d)).$$

D.h. α'_d für Verteidiger gegen g echt besser als α_d $\longrightarrow$ ↯ zur Annahme, $\langle \alpha_d, g \rangle$ sei SSG. □

Also: Bei Wahl zw. SSG- und NG-Strategien für Verteidiger ist es empfohlen, sich auf SSG-Strategien zu beschränken; Angreifer NG-Strategien austauschbar, also keine Gefahr, eine „falsche" NG-Strategie zu wählen.

Ausblick:
- bei homogenen Ressourcen + kleine Einschränkung der Nutzenfkt: ex. immer eindeutige Minimax-Strategie für Verteidiger, die zugleich eindeutige SSG- und NG-Strategie ist.
- Theorem kann erweitert werden auf mehrere Angreifer-Ressourcen.
- Literatur: Stackelberg vs. Nash in Security Games: An Extended Investigation of Interchangeability, Equivalence, and Uniqueness. JAIR 41 (2011), pp. 297–327, Korzhyk et al.