__Lemma 1:__ Sei $\mathcal{G}$ ein Sicherheitsspiel und $\bar{\mathcal{G}}$ das induzierte Nullsummenspiel. Dann ist $\langle \alpha_d, \alpha_a \rangle$ ein NG von $\mathcal{G}$ gdw. $\langle \alpha_d, f(\alpha_a) \rangle$ ein NG von $\bar{\mathcal{G}}$ ist. $\square$

__Lemma 2:__ Sei α_d eine NG-Strategie des Verteidigers in einem Sicherheitsspiel. Dann gilt $\underline{E(\alpha_d) = E^*}$. D.h. $\Omega_{NE} \subseteq \Omega_M$.

<u>Beweis:</u> Sei $\langle \alpha_d, \alpha_a \rangle$ ein NG in G.
Nach Lemma 1 ist $\langle \alpha_d, f(\alpha_a) \rangle$ ein NG in $\bar{G}$. Da α_d eine NG-Strategie in einem NSS ist, ist α_d auch eine Minimax-Strategie in $\bar{G}$ (vgl. Satz 4 VL).
Da die Nutzenfunktion des Angreifers in $\bar{G}$ und G dieselbe ist, ist α_d auch eine Minimax-Strategie in G, d.h.
$E(\alpha_d) = E^*$.

Lemma 3: Sei α_d eine Minimax-Strategie des Verteidigers in einem Sicherheitsspiel, d.h. $E(\alpha_d) = E^*$, dann ist α_d auch eine NG-Strategie, d.h. $\Omega_{\Pi} \subseteq \Omega_{NE}$.

Beweis: α_d ist Minimax-Strategie sowohl in $\mathcal{G}$ als auch in $\bar{\mathcal{G}}$. Jede Minimax-Strategie in einem NSS ist auch eine NG-Strategie (Satz 4). Es muss also ein NG (α_d, α_a) in $\bar{\mathcal{G}}$ geben.

Nach Lemma 1 ist $\langle \alpha_d, f^{-1}(\alpha_a) \rangle$ ein NG in $\mathcal{G}$. Also ist α_d eine NG-Strategie des Verteidigers in $\mathcal{G}$. $\square$

<u>Satz:</u> In jedem Sicherheitsspiel $\mathcal{G}$ gilt $\Omega_M = \Omega_{NE}$.

<u>Beweis:</u> Direkt aus Lemmas 2 und 3.

Austauschbarkeit von NGs

Kombination von NG-Strategien wieder NG

$\Rightarrow$ Strategieauswahlproblem im Fall von

abwechselnden Zügen gelöst.

<u>Satz</u>: Seien $\langle \alpha_d, \alpha_a \rangle$ und $\langle \alpha_d', \alpha_a' \rangle$ NGs in einem Sicherheitsspiel $\mathcal{G}$. Dann sind $\langle \alpha_d, \alpha_a' \rangle$ und $\langle \alpha_d', \alpha_a \rangle$ auch NGs in $\mathcal{G}$.

Beweis: Betrachte induziertes NSS $\bar{\mathcal{G}}$. Nach Lemma 1 sind $\langle \alpha_d, f(\alpha_a) \rangle$ und $\langle \alpha'_d, f(\alpha'_a) \rangle$ NGs in $\bar{\mathcal{G}}$. Nach Satz 4 folgt, dass $\langle \alpha_d, f(\alpha'_a) \rangle$ und $\langle \alpha'_d, f(\alpha_a) \rangle$ NGs in $\bar{\mathcal{G}}$. Nach Lemma 1 (Rückrichtung) sind dann $\langle \alpha_d, \alpha'_a \rangle$ und $\langle \alpha'_d, \alpha_a \rangle$ NGs in $\mathcal{G}$. $\square$

Auszahlungen? Für Angreifer in allen NGs gleich, für Verteidiger i.A. <u>nicht</u>.

<u>Satz:</u> Sei $\langle \alpha_d, \alpha_a \rangle$ ein NG in einem Sicherheitsspiel. Dann gilt

$$U_a(\alpha_d, \alpha_a) = E^* = \min_{\tilde{\alpha}_d} \max_{t_i \in T} U_a(\tilde{\alpha}_d, t_i).$$

<u>Beweis:</u> <u>„$\leq$"</u>: Nach Lemma 2 ist α_d eine Minimax-Strategie, d.h. $E(\alpha_d) = E^*$.

Also $$U_a(\alpha_d, \alpha_a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_a(t_i) \cdot U_a(\alpha_d, t_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_a(t_i) \cdot E(\alpha_d)$$

$$= E(\alpha_d) \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_a(t_i)$$

$$= E(\alpha_d) = E^*$$

<u>"$\geq$"</u>: α_a ist eine beste Antwort auf α_d, insbes. α_a mindestens so gut wie Angriff mit W'keit 1 auf
$$t^* = \arg\max_{t \in T} U_a(\alpha_d, t).$$

Also $U_a(\alpha_d, \alpha_a) \geq U_a(\alpha_d, t^*)$

$$= E(\alpha_d) = E^*$$

Insges. also $U_a(\underline{\alpha_d}, \alpha_a) = E^*$. $\square$

<u>Aber:</u> Nutzen für Verteidiger <u>nicht</u> in allen NGs gleich.

Beispiel:

	t_1		t_2	
	C	U	C	U
Vert.	1	0	2	0
Angr.	1	2	0	1

Ressourcen des Verteidigers reichen für genau ein Ziel.

für Verteidiger: $\Omega_{NE} = \Omega_{4} = \{\alpha_1\}$

mit $\alpha_1(t_1) = 1$ und $\alpha_1(t_2) = 0$.

~~[illegible] von Verteidiger~~ ;

	t_1		t_2	
	C	Z	C	Z
V	1	0	2	0
A	1	2	0	1

für Angreifer:

- α_a mit $\alpha_a(t_1) = 1$ ⟶ Nutzen für Verteidiger: 1

  oder

- α_a' mit $\alpha_a'(t_1) = \frac{2}{3}$ und $\alpha_a'(t_2) = \frac{1}{3}$.

$$U_d(t_1, \alpha_a') = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{2}{3}$$

$$U_d(t_2, \alpha_a') = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

$\boxed{(t_1, \alpha_a') \text{ NG mit Ausz. für Vert. } \tfrac{2}{3}}$

SSG-Strategien und MN-/NG-Strategien

Wenn wir das ändern, müssen wir uns keine Gedanken mehr darüber machen, ob die Vorteilsstrategie vom Angreifer beobachtet wird oder nicht.

Bem.: I. A. ist nicht jede Verteidiger-SSG-Strategie auch eine NG-Strategie. Bsp.:

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $R = \{r_1\}$, $S_1 = \{\underline{s_1}, s_2\}$,

$s_1 = \{t_1, t_2\}$, $s_2 = \{t_3, t_4\} \longrightarrow 1$

	t_1 c	t_1 u	t_2 c	t_2 u	t_3 c	t_3 u	t_4 c	t_4 u
Vert.	10	9	−2	−3	1	0	1	0
Angr.	2	5	3	4	0	1	0	1

Vert. möchte Angreifer auf t_1 „locken", aber gleichzeitig t_1 nicht völlig unverteidigt lassen und Angriff auf t_2 vermeiden. t_3, t_4 für Angr. uninteressant.

Einzige SSE-Strategie des Verteidigers: soviel Gewicht auf Schedule s_1 wie möglich, ohne dass dadurch Angreifer Anreiz hat, t_2 anzugreifen.

Lösung: $\boxed{\alpha_d(s_1) = \frac{1}{2} = \alpha_d(s_2).}$ u.

Angreifer greift mit W'keit 1 Ziel t_1 an,

Nutzen für Verteidiger: 9.5

<u>NG</u>: bei simultanen Zügen sind t_3 und t_4 für Angreifer dominiert. Also ganzes Gewicht vom Verteidiger auf $s_1 = \{t_1, t_2\}$, also Angriff auf t_2 mit W'keit 1.

Problem: „Kopplung" von t_1 und t_2 zu einem Schedule. **Idee:** „Aufbrechen" der Kopplung.

Def.: G erfüllt die SSAS-Eigenschaft („subsets of schedules are schedules"), falls für alle $r_i \in R$, für alle $s \in S_i$ und für alle $s' \subseteq s$ gilt: $s' \in S_i$.

Bem.: SSAS-Eigenschaft ist oft „natürlich" herzustellen (durch „Nichtstun").

Lemma A: Sei α_d eine Verteidiger-Strategie in einem Sicherheitsspiel, das der SSAS-Eigenschaft erfüllt, und für $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n) = \varphi(\alpha_d)$ der entsprechende Vektor von Abdeckungswahrscheinlichkeiten. Dann gibt es für alle $\bar{c}' = (c'_1, \dots, c'_n)$ mit $0 \leq c'_i \leq c_i$ für alle $t_i \in T$ eine Verteidigerstrategie α'_d mit $\varphi(\alpha'_d) = \bar{c}'$.

Bew: HA, Idee: Induktion.