Lemma 1: Sei $\mathcal{G}$ ein Sicherheitsspiel und $\bar{\mathcal{G}}$ das reduzierte Nullsummenspiel. Dann ist $\langle \alpha_d, \alpha_a \rangle$ ein NG von $\mathcal{G}$ gdw. $\langle \alpha_d, f(\alpha_a) \rangle$ ein NG von $\bar{\mathcal{G}}$ ist. □

Lemma 2: Sei α_d eine NG-Strategie des Verteidigers in einem Sicherheitsspiel. Dann gilt $E(\alpha_d) = E^*$. D.h. $\Omega_{NE} \subseteq \Omega_M$.

Beweis: Sei $\langle \alpha_d, \alpha_a \rangle$ ein NG in $\mathcal{G}$. Nach Lemma 1 ist $\langle \alpha_d, f(\alpha_a) \rangle$ ein NG in $\bar{\mathcal{G}}$. Da α_d eine NG-Strategie in einem NSS ist, ist α_d auch eine Minimax-Strategie in $\bar{\mathcal{G}}$ (vgl. Satz 4 b)). Da die Nutzenfunktion des Angreifers in $\bar{\mathcal{G}}$ und $\mathcal{G}$ dieselbe ist, ist α_d auch eine Minimax-Strategie in $\mathcal{G}$, d.h. $E(\alpha_d) = E^*$.

Lemma 3: Sei α_d eine Minimax-Strategie des Verteidigers in einem Sicherheitsspiel, d.h. $E(\alpha_d) = E^*$, dann ist α_d auch eine NG-Strategie, d.h. $\Omega_M \subseteq \Omega_{NE}$.

Beweis: α_d ist Minimax-Strategie sowohl in $\mathcal{G}$ als auch in $\bar{\mathcal{G}}$. Jede Minimax-Strategie in einem NSS ist auch eine NG-Strategie (Satz 4). Es muss also ein NG $\langle \alpha_d, \alpha_a \rangle$ in $\bar{\mathcal{G}}$ geben.

Nach Lemma 1 ist $\langle \alpha_d, f^{-1}(\alpha_a) \rangle$ ein NG in $\mathcal{G}$. Also ist α_d eine NG-Strategie des Verteidigers in $\mathcal{G}$. □

Satz: In jedem Sicherheitsspiel $\mathcal{G}$ gilt $\Omega_M = \Omega_{NE}$.

Beweis: Direkt aus Lemma 2 und 3.

Austauschbarkeit von NGs

Kombination von NG-Strategien wieder NG

$\Rightarrow$ Strategieauswahlproblem im Fall von simultanen Zügen gelöst.

Satz: Seien $\langle \alpha_d, \alpha_a \rangle$ und $\langle \alpha_d', \alpha_a' \rangle$ NGs in einem Sicherheitsspiel G. Dann sind $\langle \alpha_d, \alpha_a' \rangle$ und $\langle \alpha_d', \alpha_a \rangle$ auch NGs in G.

Beweis: Betrachte induziertes NSS $\bar{G}$. Nach Lemma 1 sind $\langle \alpha_d, f(\alpha_a) \rangle$ und $\langle \alpha_d', f(\alpha_a') \rangle$ NGs in $\bar{G}$. Nach Satz 4 folgt, dass $\langle \alpha_d, f(\alpha_a') \rangle$ und $\langle \alpha_d', f(\alpha_a) \rangle$ NGs in $\bar{G}$. Nach Lemma 1 (Rückrichtung) sind dann $\langle \alpha_d, \alpha_a' \rangle$ und $\langle \alpha_d', \alpha_a \rangle$ NGs in G. $\square$

Auszahlungen? Für Angreifer in allen NGs gleich, für Verteidiger i.A. nicht.

Satz: Sei $\langle \alpha_d, \alpha_a \rangle$ ein NG in einem Sicherheitsspiel. Dann gilt

$$U_a(\alpha_d, \alpha_a) = E^* = \min_{\tilde{\alpha}_d} \max_{t_i \in T} U_a(\tilde{\alpha}_d, t_i).$$

Beweis: „$\leq$": Nach Lemma 2 ist α_d eine Minimax-Strategie, d.h. $E(\alpha_d) = E^*$.

Also

$$\begin{aligned} U_a(\alpha_d, \alpha_a) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_a(t_i) \cdot U_a(\alpha_d, t_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_a(t_i) \cdot E(\alpha_d) \\ &= E(\alpha_d) \sum_{i=1}^{n} \alpha_a(t_i) \\ &= E(\alpha_d) = E^* \end{aligned}$$

„$\geq$": α_a ist eine beste Antwort auf α_d, wobei α_a mindestens so gut wie Angriff mit W'keit 1 auf $t^* = \arg\max_{t \in T} U_a(\alpha_d, t)$.

Also $U_a(\alpha_d, \alpha_a) \geq U_a(\alpha_d, t^*)$

$$= E(\alpha_d) = E^*$$

Insgesamt also $U_a(\alpha_d, \alpha_a) = E^*$. □

Aber: Nutzen für Verteidiger nicht in allen NGs gleich.

Beispiel:

	t_1		t_2	
	C	U	C	U
Vert	1	0	2	0
Angr.	1	2	0	1

Ressourcen des Verteidigers reichen für genau ein Ziel.

für Verteidiger: $\Omega_{NE} = \Omega_{\alpha_1} = \{\alpha_d\}$ mit $\alpha_d(t_1) = 1$ und $\alpha_d(t_2) = 0$.

~~Also der Nutzen vom Verteidiger~~:

	t_1		t_2	
	C	U	C	U
V	1	0	2	0
A	1	2	0	1

für Angreifer:

- α_a mit $\alpha_a(t_1) = 1 \rightsquigarrow$ Nutzen für Verteidiger: 1, oder
- α_a' mit $\alpha_a'(t_1) = \frac{2}{3}$ und $\alpha_a'(t_2) = \frac{1}{3}$.

$$U_d(t_1, \alpha_a') = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{2}{3}$$
$$U_d(t_2, \alpha_a') = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

$\boxed{(t_1, \alpha_a') \text{ NG mit Ausz. für Vert. } \frac{2}{3}}$

SSG-Strategien sind NE-/NG-Strategien

Wenn wir das wissen, müssen wir uns keine Gedanken mehr darüber machen, ob die Verteidigerstrategien vom Angreifer beobachtet wird oder nicht.

Abs: I. A. ist nicht jede Verteidiger-SSG-Strategie auch eine NG-Strategie. Bsp.:

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $R = \{r_1\}$, $S_1 = \{s_1, s_2\}$,

$s_1 = \{t_1, t_2\}$, $s_2 = \{t_3, t_4\}$ $\longrightarrow 1$

	t_1		t_2		t_3		t_4	
	c	u	c	u	c	u	c	u
Vert.	10	9	-2	-3	1	0	1	0
Angr.	2	5	3	4	0	1	0	1

Vert. möchte Angreifer auf t_1 „locken", aber gleichzeitig t_1 nicht völlig unverteidigt lassen und Angriff auf t_2 vermeiden. t_3, t_4 für Angr. uninteressant.

Einzige SSG-Strategie des Verteidigers: soviel Gewicht auf Schedule s_1 wie möglich, ohne dass dadurch Angreifer Anreiz hat, t_2 anzugreifen.

Lösung: $\boxed{\alpha_d(s_1) = \frac{1}{2} = \alpha_d(s_2).}$ Angreifer greift mit W'keit 1 Ziel t_1 an, Nutzen für Verteidiger: 9.5

NG: bei simultanen Zügen sind t_3 und t_4 für Angreifer dominiert. Also ganzes Gewicht vom Verteidiger auf $s_1 = \{t_1, t_2\}$, also Angriff auf t_2 mit W'keit 1.

Problem: „Kopplung" von t_1 und t_2 zu einem Schedule. Idee: „Aufbrechen" der Kopplung.

Def.: G erfüllt die SSAS-Eigenschaft („subsets of schedules are schedules"), falls für alle $r_i \in R$, für alle $s \in S_i$ und für alle $s' \subseteq s$ gilt: $s' \in S_i$.

Bem: SSAS-Eigenschaft ist oft „natürlich" herzustellen (durch „Nichtstun").

Lemma A: Sei α_d eine Verteidiger-Strategie in einem Sicherheitsspiel, das die SSAS-Eigenschaft erfüllt, und sei $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_n) = \varphi(\alpha_d)$ der entsprechende Vektor von Abdeckungswahrscheinlichkeiten. Dann gibt es für alle $\bar{c}' = (c_1', \ldots, c_n')$ mit $0 \leq c_i' \leq c_i$ für alle $t_i \in T$ eine Verteidigerstrategie α_d' mit $\varphi(\alpha_d') = \bar{c}'$.

Bew: HA, Idee: Induktion.