Erinnerung: s^* TPG gdw. f.a. $i \in N$, f.a. $h \in H \setminus Z$

mit $P(h) = i$: $u_i|_h(O_h(s^*_{-i}, \underline{s^*_i})) \geq u_i|_h(O_h(s^*_{-i}, \underline{s_i}))$

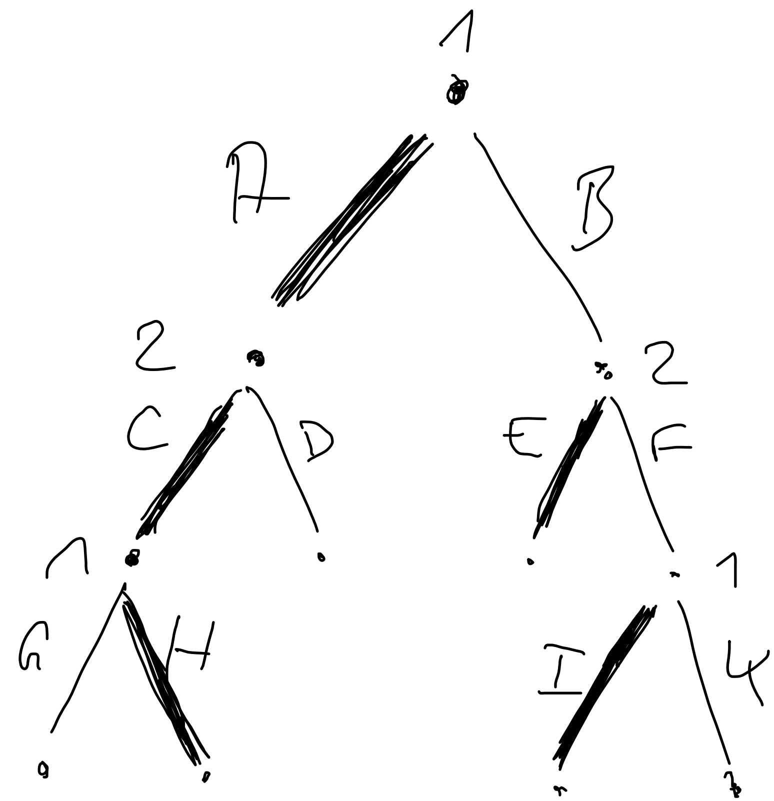
für jede Strategie s_i von Spieler i in $\Gamma(h)$.

Lemma: s^* TPG gdw. ...

für jede Strategie s_i' von Spieler i in $\Gamma(h)$,

die sich von $s^*_i|_h$ nur in der Aktion unterscheidet, die direkt nach der initialen History von $\Gamma(h)$ vorgeschrieben wird. $\square$

Beispiel:



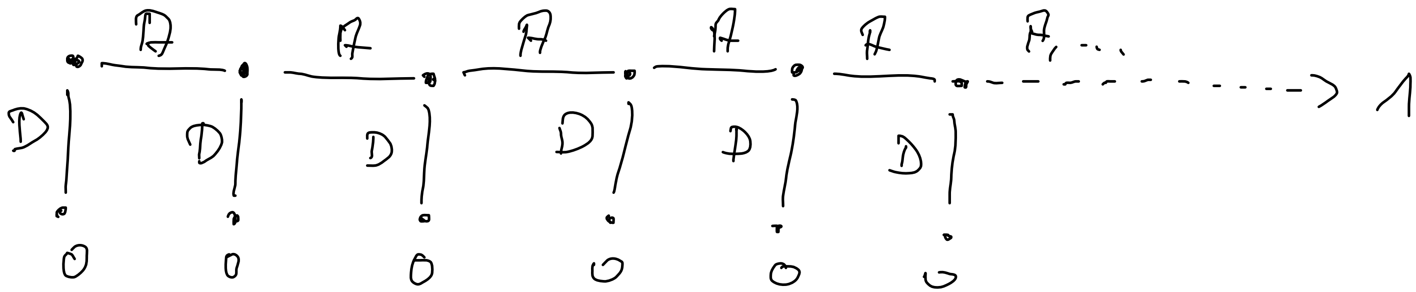
Um zu zeigen, dass (AHI, CE) TPG ist, reicht es, folgende Abweichungen auf Profitabilität zu untersuchen:

- für Sp. 1:
  - G in $\Gamma(\langle A, C\rangle)$
  - K in $\Gamma(\langle B, F\rangle)$
  - BHI in Γ

nicht nötig: BGK in Γ.

- für Sp. 2:
  - D in $\Gamma(\langle A\rangle)$
  - F in $\Gamma(\langle B\rangle)$

Bem: Entsprechende Aussage für Spiele ohne endlichen Horizont gilt nicht. Bsp.:



Betrachte s_1 mit $s_1(h) = D$ f.a. $h \in H \setminus Z$.

- s_1 ist kein TPG, weil Abweichung auf s_1^* mit $s_1^*(h) = A$ f.a. $h \in H \setminus Z$ profitable Abweichung.
- s_1 erfüllt 1-SA-~~A~~Eigenschaft

Def.: Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ein ext. Spiel upI und mit <u>endlichem Horizont</u>. Dann sei

$$\ell(\Gamma) := \max_{h \in H} |h|$$ die Länge der längsten Historie von Γ.

<u>Satz von Kuhn</u>: Jedes endliche extensive Spiel upI hat ein TPG.

Beweis: Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ein ext. Sp. m. p. I.,

Γ endlich. Konstruiere TPG durch Induktion

über die Länge $\ell(\Gamma(h))$ für Teilspiele $\Gamma(h)$ von

Γ. Konstruiere dazu parallel Funktionen

$t_i : H \to \mathbb{R}$ für alle Spieler $i \in N$, so dass

$t_i(h)$ die Auszahlung für Spieler i ~~in~~ in

einem TPG im Teilspiel $\Gamma(h)$ ist (in dem

konstruierten TPG).

Induktionsanfang: Falls $l(\Gamma(h)) = 0$, so setze

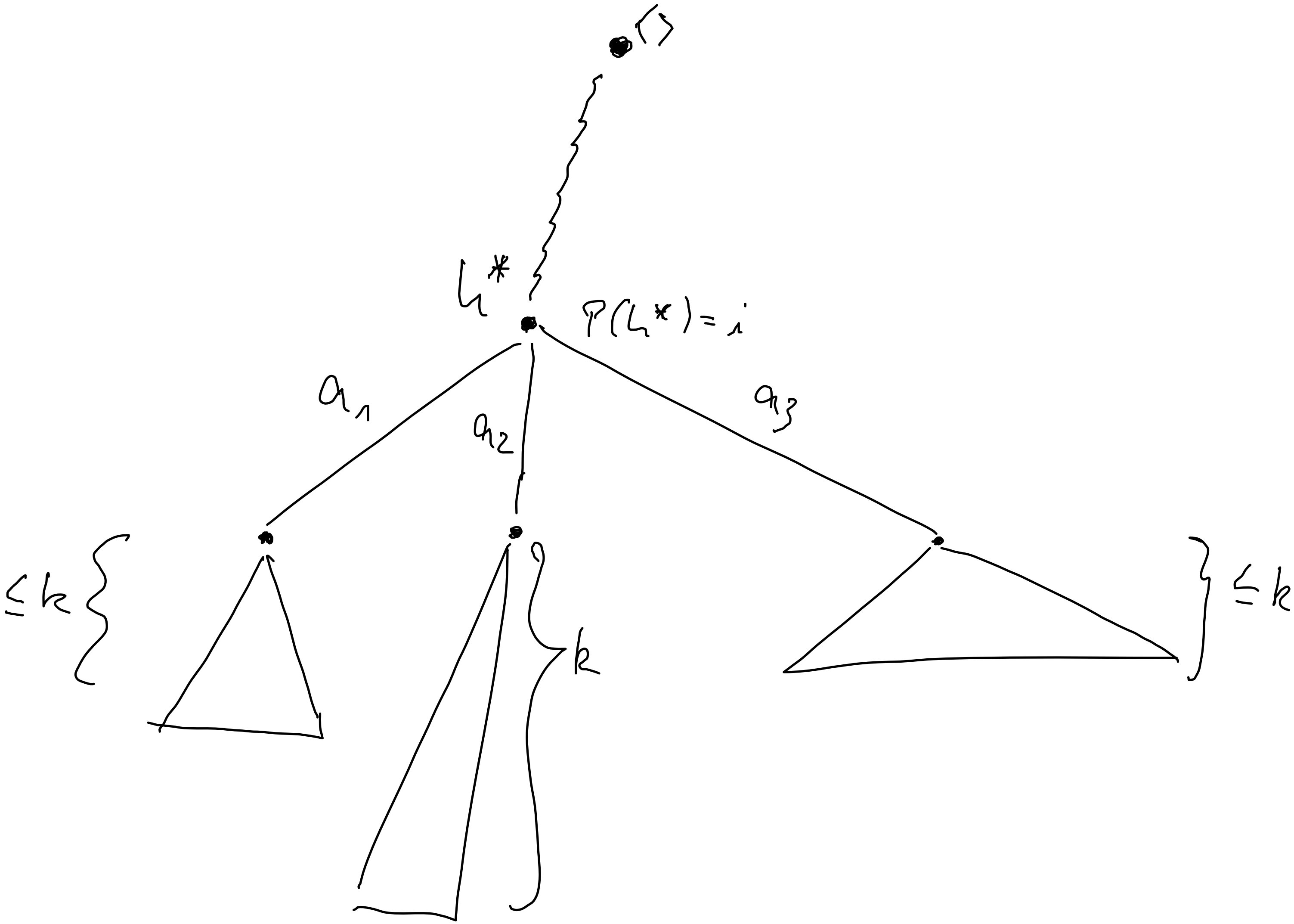
$$t_i(h) = u_i(h) \quad \text{für alle Sp. } i \in N.$$

Induktionsschritt: Sei $t_i(h)$ für alle $i \in N$ und

für alle $h \in H$ mit $l(\Gamma(h)) \leq k$ bereits

definiert. Betrachte nun $h^* \in H$ mit

$$l(\Gamma(h^*)) = k+1 \text{ und } P(h^*) = i.$$



r
h^*
$P(h^*) = i$
a_1
a_2
a_3
$\leq k$
k
$\leq k$

Für alle $a \in A(h^*)$ ist $\ell(\Gamma(h^*, a)) \leq k$. Also in $\Gamma(h^*, a)$ t_i's schon definiert. Setze

$$\boxed{s_i(h^*) := \operatorname*{argmax}_{a \in A(h^*)} t_i(h^*, a)}$$

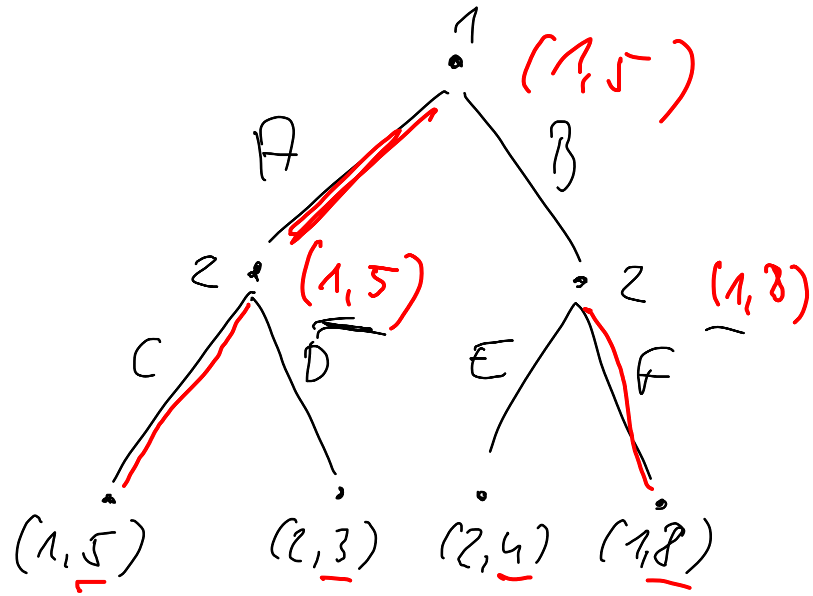
und

$$t_j(h^*) := t_j(h^*, s_i(h^*))$$

für alle $j \in N$.

Induktiv liefert das ein Strategieprofil s, das die 1-SA-Eigenschaft erfüllt. Mit 1SA-Lemma folgt, dass s ein TPG ist. $\square$

Beispiel:



$s_2(\langle A\rangle) = C$

$(t_1(\langle A\rangle), t_2(\langle A\rangle)) = (1,5)$

$s_2(\langle B\rangle) = F$

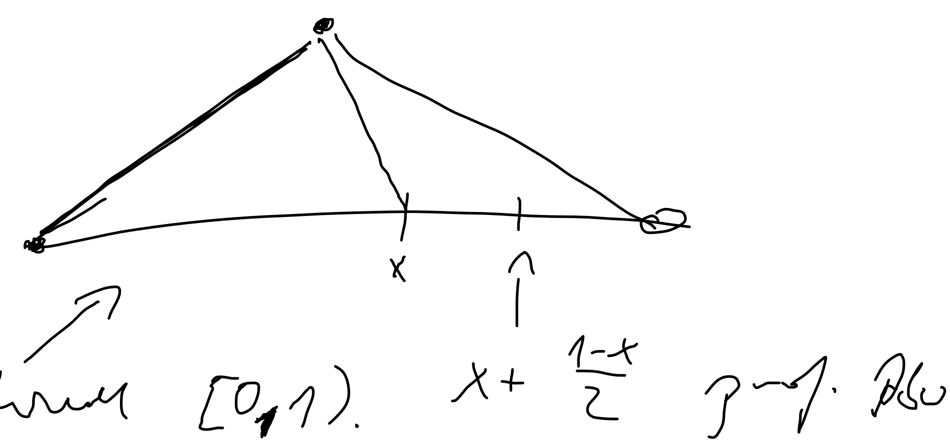
$(t_1(\langle B\rangle), t_2(\langle B\rangle)) = (1,8)$

Wahl von $s_1(\langle\rangle) \in \{A, B\}$ in diesem Fall beliebig, weil durch $a \in \{A, B\}$ den Nutzen $t_1(\langle a\rangle) = 1$ maximieren. Etwa $s_1(\langle\rangle) = A$. Dann $(t_1(\langle\rangle), t_2(\langle\rangle)) = (1,5)$. $\leadsto$ (A, CF) ist TPG.

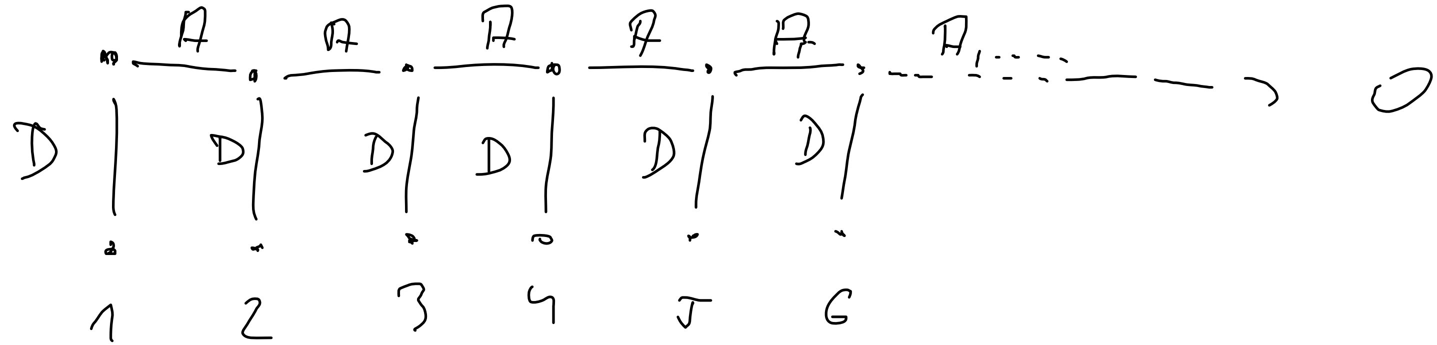
Bem.: Entsprechung zu Satz v. Kuhn gilt nicht für unendliche Spiele.

1) Endlicher Horizont, unendlicher Verzweigungsgrad.

Ein-Spieler-Spiel, $A(\langle\rangle) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ und $u_1(\langle x \rangle) = x$ für alle $x \in A(\langle\rangle)$. Es gibt kein TPG, denn für jede Strategie x ist $x + \frac{1-x}{2}$ eine profitable Abweichung.



2) Unendlicher Horizont, endlicher Verzweigungsgrad:



also $u_1(AA\ldots)=0$

und $u_1(\underbrace{A\ldots A}_{n\text{-mal}}D\ldots)=n+1$

Wesentlich unterschiedliche Strategien unterscheiden sich nur im „Auszahlungszeitpunkt". Strategie AAA... wird dominiert von D... . Strategie $\underbrace{AA\ldots A}_{n\text{-mal}}D$ wird dominiert von $\underbrace{AA\ldots A}_{(n+1)\text{mal}}D$. $\Longrightarrow$ ex. <u>kein</u> TPG.

Erweiterung 1: Zufallszüge

Def.: Ein ext. Sp. mpI und Zufallszügen ist ein Tupel $\Gamma = \langle N, H, P, f_c, (u_i) \rangle$, wo N, H, u_i wie gehabt, und wo $P : H \setminus Z \to N \cup \{c\}$ auch den Wert $c \notin N$ für „chance node" (Zufallsknoten) annehmen darf, und wo für alle $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = c$ die Funktion $f_c(\cdot \mid h)$ ein W'keitsmaß über $A(h)$ ist. Die W'keitsmaße $f_c(\cdot \mid h)$ sind für alle $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = c$ unabh. voneinander.

Strategien: wie gehabt

Ausgang eines Spiels bei gegebenem Strategieprofil:

W'keitsmaß über der Menge der terminalen Historien.

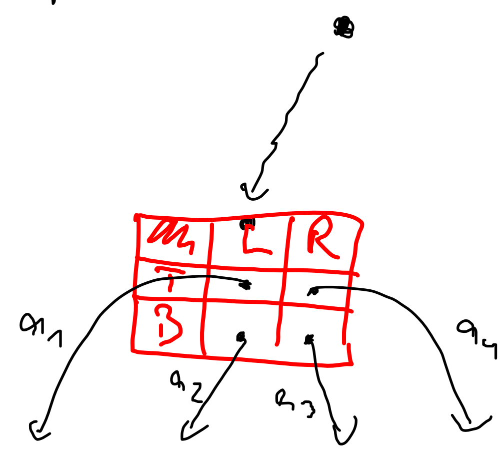
Auszahlungen: arbeiten mit <u>erwarteten</u> Auszahlungen

U_i für alle Spieler $i \in N$.

<u>Bem.:</u> 1-SA-Lemma und Satz von Kuhn gelten weiterhin (für U_i statt u_i).

Erweiterung 2: simultane Züge:

Def.: Ein extensives Spiel mpI und simultanen Zügen ist ein Tupel $\langle N, H, P, (u_i) \rangle$, wo N, H, u_i wie gehabt, und wo $P : H \setminus Z \to 2^N \setminus \{\emptyset\}$ jeder nichtterminalen Historie $h \in H \setminus Z$ eine Menge von Spielern zuordnet.



Für alle $h \in H \setminus Z$ muss eine Familie $(A_i(h))_{i \in P(h)}$,

s.d. $A(h) = \{a \mid (h,a) \in H\} = \prod_{i \in P(h)} A_i(h)$.

Simultane Züge: alle Spieler aus $P(h)$ ziehen gleichzeitig.

Strategien: $s_i : h \longmapsto a_i \in A_i(h)$.

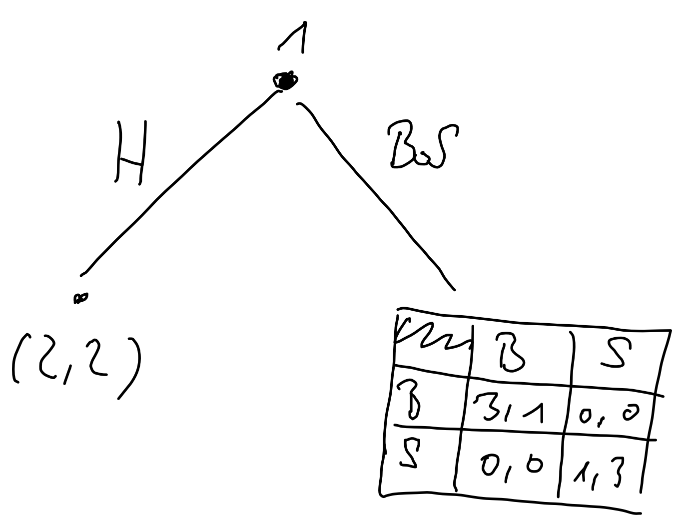
Historien: Sequenzen von Vektoren von Aktionen.

Def. TPG: Ersetze Bedingung „$P(h) = i$" durch „$i \in P(h)$".

Bem.: Satz von Kuhn gilt nicht mehr.

z.B. ist das Elfmeterspiel auch ein endl. ext. Spiel mpI und simultanen Zügen.

Bsp.: BoS with outside option:



	B	S
B	3,1	0,0
S	0,0	1,3