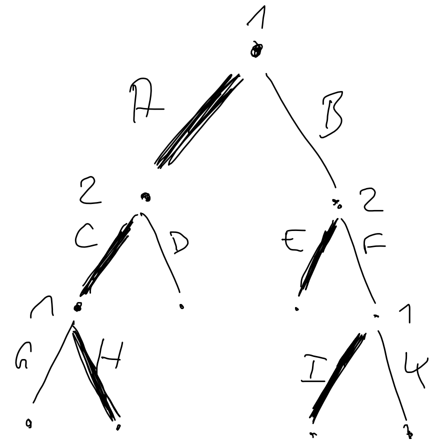
Erinnerung: s^* TPG gdw. f.a. $i \in N$, f.a. $h \in H \setminus Z$ mit $P(h)=i$: $u_i|_h(O_h(s^*_{-i}, s^*_i)) \geq u_i|_h(O_h(s^*_{-i}, s_i))$ für jede Strategie s_i von Spieler i in $\Gamma(h)$.

Lemma: s^* TPG gdw. . . . für jede Strategie s_i' von Spieler i in $\Gamma(h)$, die sich von $s^*_i|_h$ nur in der Aktion unterscheidet, die direkt nach der initialen Historie von $\Gamma(h)$ vorgeschrieben wird. □

Beispiel:

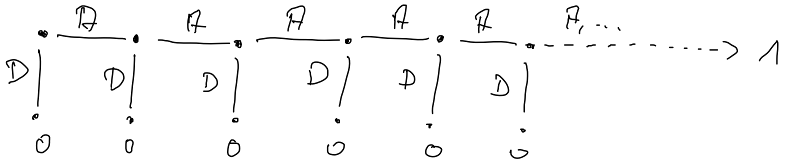


Um zu zeigen, dass (AHI, CE) TPG ist, reicht es, folgende Abweichungen auf Profitabilität zu untersuchen:

- für Sp. 1:
  - G in $\Gamma(\langle A, C\rangle)$
  - K in $\Gamma(\langle B, F\rangle)$
  - BHI in Γ

  nicht nötig: BGK in Γ.
- für Sp. 2:
  - D in $\Gamma(\langle A\rangle)$
  - F in $\Gamma(\langle B\rangle)$

Bem.: Entsprechende Aussage für Spiele ohne endlichen Horizont gilt nicht. Bsp.:



Betrachte s_1 mit $s_1(h)=D$ f.a. $h \in H\setminus Z$.

- s_1 ist kein TPG, weil Abweichung auf s_1^* mit $s_1^*(h)=A$ f.a. $h \in H \setminus Z$ profitable Abweichung.
- s_1 erfüllt 1-SA-Eigenschaft

Def.: Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ein ext. Spiel mpI und mit endlichem Horizont. Dann sei

$$\ell(\Gamma) := \max_{h \in H} |h|$$

die Länge der längsten Historie von Γ.

Satz von Kuhn: Jedes endliche extensive Spiel mpI hat ein TPG.

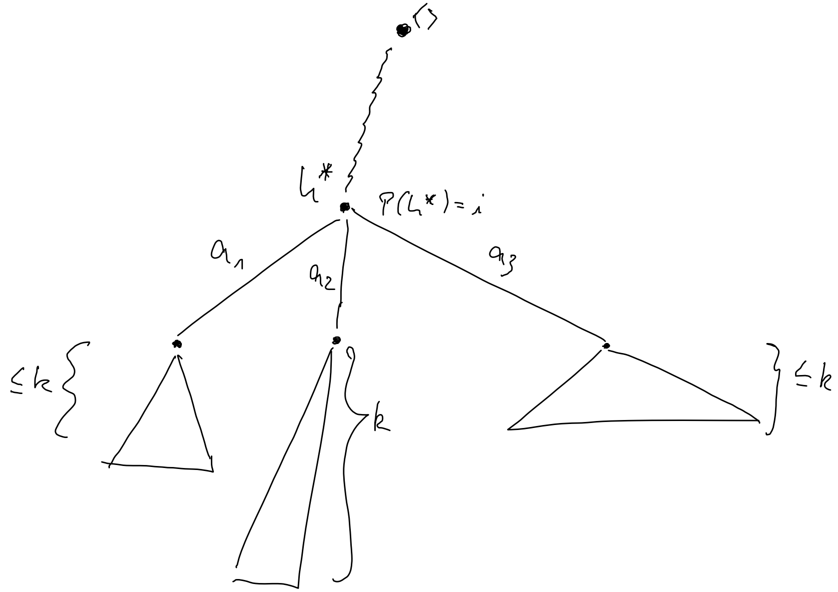
Beweis: Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ein ext. Sp. mpI, Γ endlich. Konstruiere TPG durch Induktion über die Länge $\ell(\Gamma(h))$ für Teilspiele $\Gamma(h)$ von Γ. Konstruiere dazu parallel Funktionen $t_i : H \to \mathbb{R}$ für alle Spieler $i \in N$, so dass $t_i(h)$ die Auszahlung für Spieler i in einem TPG im Teilspiel $\Gamma(h)$ ist (in dem konstruierten TPG).

Induktionsanfang: Falls $\ell(\Gamma(h)) = 0$, so setze

$$t_i(h) = u_i(h) \quad \text{für alle Sp. } i \in N.$$

Induktionsschritt: Sei $t_i(h)$ für alle $i \in N$ und für alle $h \in H$ mit $\ell(\Gamma(h)) \leq k$ bereits definiert. Betrachte nun $h^* \in H$ mit

$$\ell(\Gamma(h^*)) = k+1 \text{ und } P(h^*) = i.$$



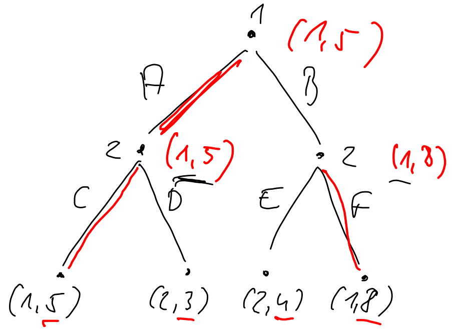
Für alle $a \in A(h^*)$ ist $\ell(\Gamma(h^*, a)) \leq k$. Also in $\Gamma(h^*, a)$ t_i's schon definiert. Setze

$$\boxed{s_i(h^*) := \underset{a \in A(h^*)}{\operatorname{argmax}}\, t_i(h^*, a)} \quad \text{und}$$

$$t_j(h^*) := t_j(h^*, s_i(h^*)) \quad \text{für alle } j \in N.$$

Induktion liefert das ein Strategieprofil s, das die 1-SA-Eigenschaft erfüllt. Mit 1SA-Lemma folgt, dass s ein TPG ist. □

Beispiel:



$s_2(\langle A\rangle) = C$ $\qquad$ $s_2(\langle B\rangle) = F$

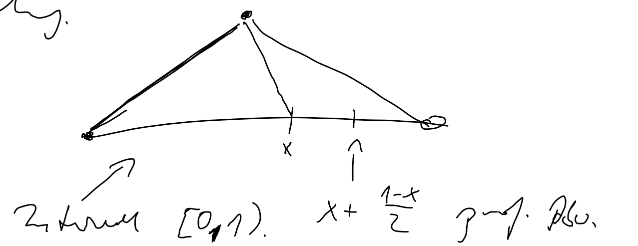
$(t_1(\langle A\rangle), t_2(\langle A\rangle)) = (1,5)$ $\qquad$ $(t_1(\langle B\rangle), t_2(\langle B\rangle)) = (1,8)$

Wahl von $s_1(\langle\rangle) \in \{A, B\}$ in diesem Fall beliebig, weil beide $a \in \{A,B\}$ den Nutzen $t_1(\langle a\rangle) = 1$ maximieren. Etwa $s_1(\langle\rangle) = A$. Dann $(t_1(\langle\rangle), t_2(\langle\rangle)) = (1,5)$. $\Rightarrow$ (A, CF) ist TPG.

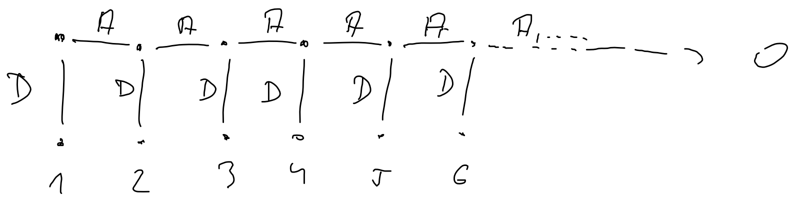
Bem.: Entsprechung des Satzes v. Kuhn gilt nicht für unendliche Spiele.

1) Endlicher Horizont, unendlicher Verzweigungsgrad.

Ein-Spieler-Spiel, $A(\langle\rangle) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 1\}$ und $u_1(\langle x\rangle) = x$ für alle $x \in A(\langle\rangle)$. Es gibt kein TPG, denn für jede Strategie x ist $x + \frac{1-x}{2}$ eine profitable Abweichung.



2) Unendlicher Horizont, endlicher Verzweigungsgrad:



also $u_1(AA\ldots) = 0$

und $u_1(\underbrace{A\ldots A}_{n\text{-mal}}D\ldots) = n+1$

Wesentlich unterschiedliche Strategien unterscheiden sich nur im „Aussteigezeitpunkt". Strategie $AA\ldots$ wird dominiert von $D\ldots$. Strategie $\underbrace{AA\ldots A}_{n\text{-mal}}D$ wird dominiert von $\underbrace{AA\ldots A}_{(n+1)\text{-mal}}D$ $\Longrightarrow$ ex. kein TPG.

Erweiterung 1: Zufallszüge

Def.: Ein ext. Sp. mpI und Zufallszügen ist ein Tupel $\Gamma = \langle N, H, P, f_c, (u_i)\rangle$, wo N, H, u_i wie gehabt, und wo $P: H \setminus Z \to N \cup \{c\}$ auch den Wert $c \notin N$ für „chance node" (Zufallsknoten) annehmen darf, und wo für alle $h \in H\setminus Z$ mit $P(h) = c$ die Funktion $f_c(\cdot \mid h)$ ein W'keitsmaß über $A(h)$ ist. Die W'keitsmaße $f_c(\cdot \mid h)$ sind für alle $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = c$ unabh. voneinander.

Strategien: wie gehabt

Ausgang eines Spiels bei gegebenem Strategieprofil:

W'keitsmaß über der Menge der terminalen Historien.

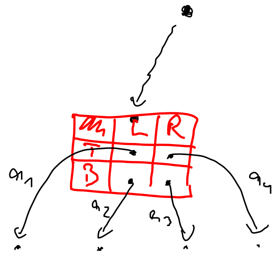
Auszahlungen: arbeiten mit erwarteten Auszahlungen

U_i für alle Spieler $i \in N$.

Bem.: 1-SA-Lemma und Satz von Kuhn gelten weiterhin (für U_i statt u_i).

Erweiterung 2: Simultane Züge:

Def.: Ein extensives Spiel mpI und simultanen Zügen ist ein Tupel $\langle N, H, P, (u_i) \rangle$, wo N, H, u_i wie gehabt, und wo $P: H \setminus Z \to 2^N \setminus \{\emptyset\}$ jeder nichtterminalen Historie $h \in H \setminus Z$ eine Menge von Spielern zuordnet.



Für alle $h \in H \setminus Z$ muss eine Familie $(A_i(h))_{i \in P(h)}$,

s.d. $A(h) = \{a \mid (h,a) \in H\} = \prod_{i \in P(h)} A_i(h)$.

Simultane Züge: alle Spieler aus $P(h)$ ziehen gleichzeitig.

Strategien: $s_i : h \mapsto a_i \in A_i(h)$.

Historien: Sequenzen von Vektoren von Aktionen.

Def. TPG: Ersetze Bedingung „$P(h) = i$" durch „$i \in P(h)$".

Bem.: Satz von Kuhn gilt nicht mehr.

z.B. ist das Elfmeterspiel auch ein endl. ext. Spiel mpI und simultanen Zügen.

Bsp.: BoS with outside option: