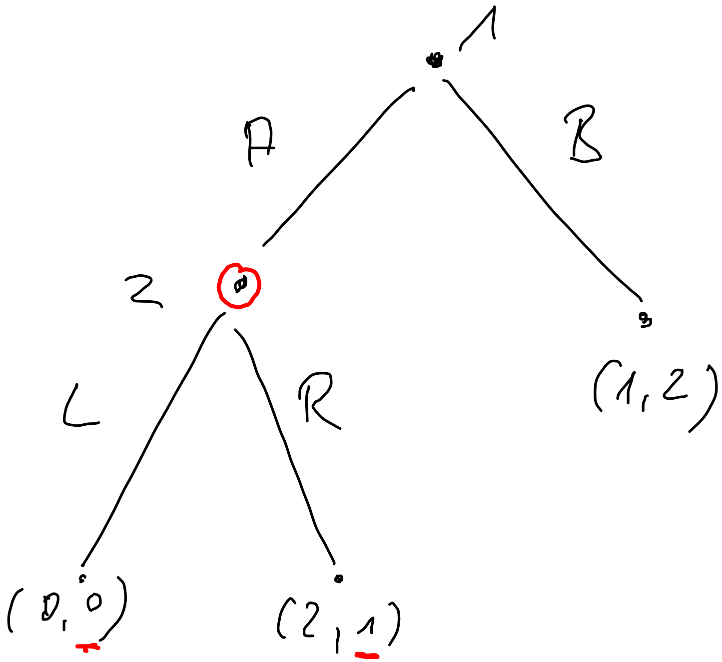
NGs in extensiven Spielen mpI

Def.: Ein NG in einem extensiven Spiel mpI $\langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ist ein Strategieprofil s^*, s.d. für alle Spieler $i \in N$ und für alle s_i von Sp. i gilt:

$$u_i(O(s^*_{-i}, s^*_i)) \geq u_i(O(s^*_{-i}, s_i)).$$

Bsp.:

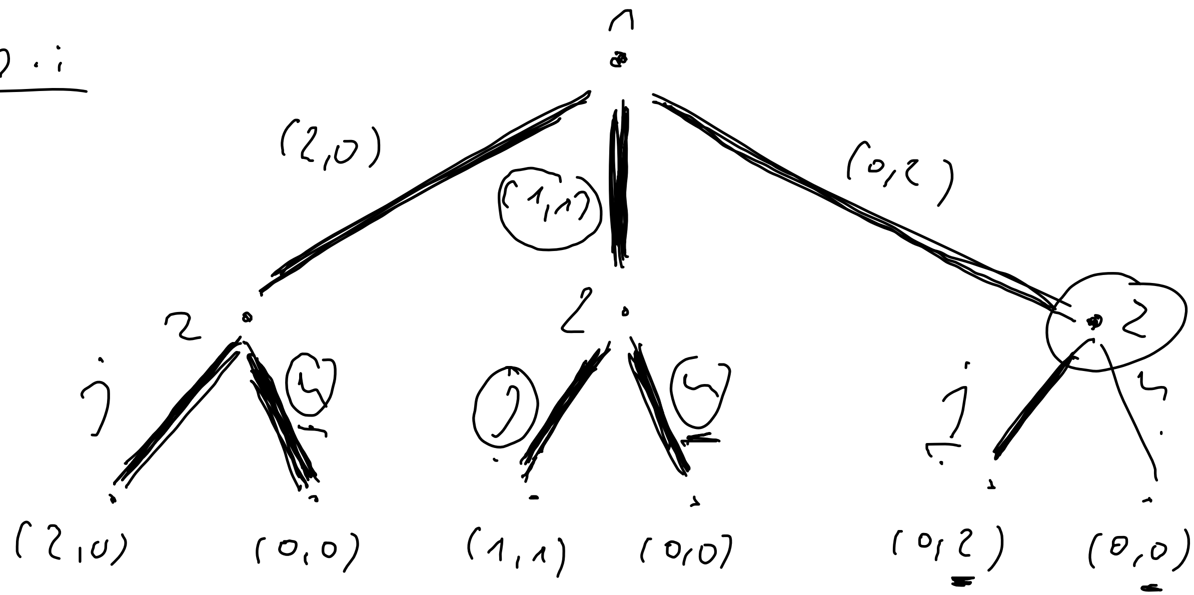


Strategische Form:

		Sp. 2	
		L	R
Sp. 1	A	0, 0	2, 1
	B	1, 2	1, 2

(B, L): L leere Drohung!

Bsp.:



NG:

((2,0), jjj) → ((2,0), jjn) → ((2,0), jnj) → ((2,0), jnn) → ((2,0), nnj) → ((2,0), nnn)

((1,1), njj) → ((1,1), njn) → ((0,2), nnj)

einzige NGs ohne leere Drohungen.

Teilspielperfekte Gleichgewichte

Idee: leere Drohungen ausschließen.

Forderung: Strategien sollen nicht nur in der strategischen Form des gesamten Spiels im Gleichgewicht sein, sondern auch in denen aller Teilspiele.

Def.: Ein *Teilspiel* eines extensiven Spiels mpI

$\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$, das nach der Historie $h \in H$ beginnt, ist das Spiel $\Gamma(h) = \langle N, H|_h, P|_h, (u_i|_h)\rangle$

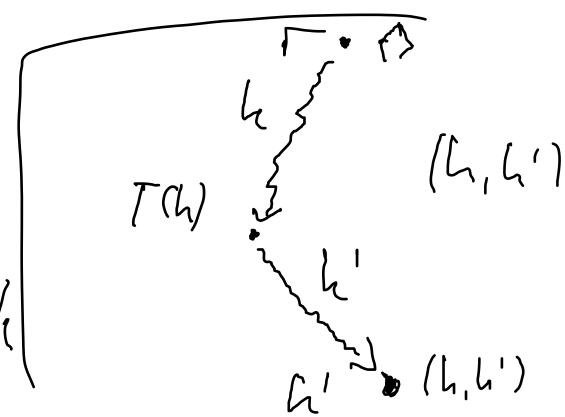
wobei $H|_h = \{h' \mid (h,h') \in H\}$,

$P|_h(h') = P(h,h')$ für alle $h' \in (H\setminus Z)|_h$, und

$u_i|_h(h') = u_i(h,h')$ für alle $h' \in Z|_h$.

Für Strategie s_i und Historie h von Γ sei $s_i|_h$ die durch s_i induzierte Strategie für $\Gamma(h)$ also

$s_i|_h(h') = s_i(h,h')$ für $h' \in (H\setminus Z)|_h$



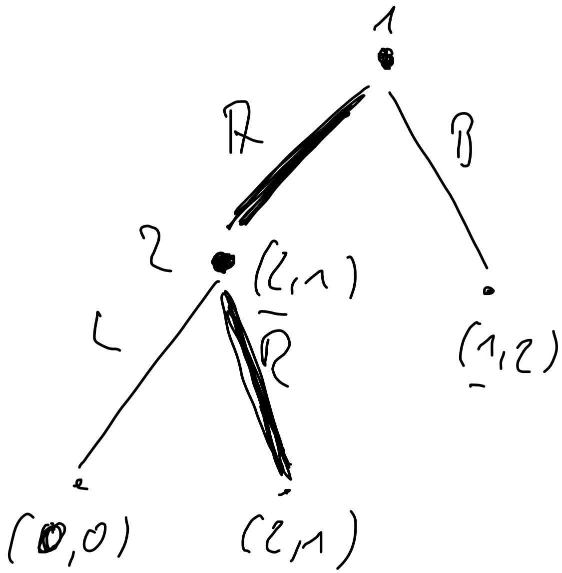
O_h ist die Ergebnisfunktion für $\Gamma(h)$.

Def.: (teilspielperfektes Gleichgewicht). Ein teilspielperfektes Gleichgewicht (TPG) in einem extensiven Spiel mpI $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ist ein Strategieprofil s^*, so dass für jeden Spieler $i \in N$ und für jede History $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = i$ gilt:

$$u_i|_h \left(O_h \left(s^*_{-i}|_h , s^*_i|_h \right) \right) \geq u_i|_h \left(O_h \left(s^*_{-i}|_h , s_i \right) \right)$$

für alle Strategien s_i von Spieler i in dem Teilspiel $\Gamma(h)$.

Beispiel:



Zwei NGs:

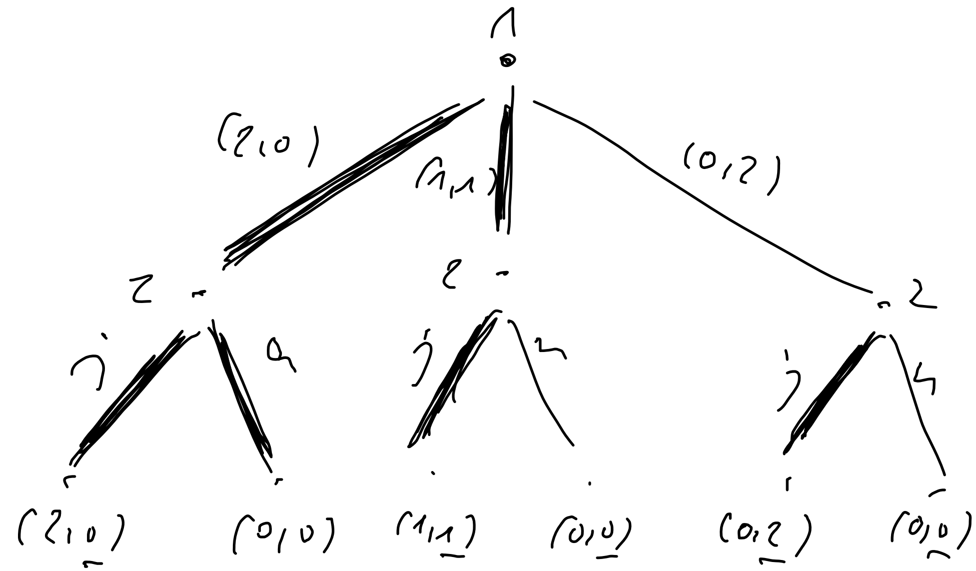
(A, R)

(B, L)

(A, R): Zu Hist. $\langle A \rangle = h$ ist $(A|_h, R|_h)$ teilspielperfekt, weil Sp. 2 R wählt. Zu $h = \langle \rangle$ ist (A, R) teilspielperfekt, weil kein Spieler einen Anreiz hat, abzuweichen. $\longrightarrow$ ~~TPG~~ TPG.

(B, L): kein TPG, da L in $h = \langle A \rangle$ nicht den Nutzen von Sp. 2 maximiert.

Bsp.:



((2,0), jjj)
((1,1), njj)

einzige TPGs

Satz (Ein-Schritt-Abweichung): Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ein ext. Spiel mpI mit endlichem Horizont. Ein Strategieprofil s^* ist ein TPG von Γ gdw. für jeden Spieler $i \in N$ und für jede Historie $h \in H$ mit $P(h) = i$ gilt:

$$u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, \underline{s^*_i|_h})) \geq u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s_i))$$

für jede Strategie s_i von Spieler i im Teilspiel $\Gamma(h)$, die sich von $s^*_i|_h$ nur in der Aktion unterscheidet, die direkt nach der initialen Historie von $\Gamma(h)$ vorgeschrieben wird.

Beweis: „$\Rightarrow$": klar.

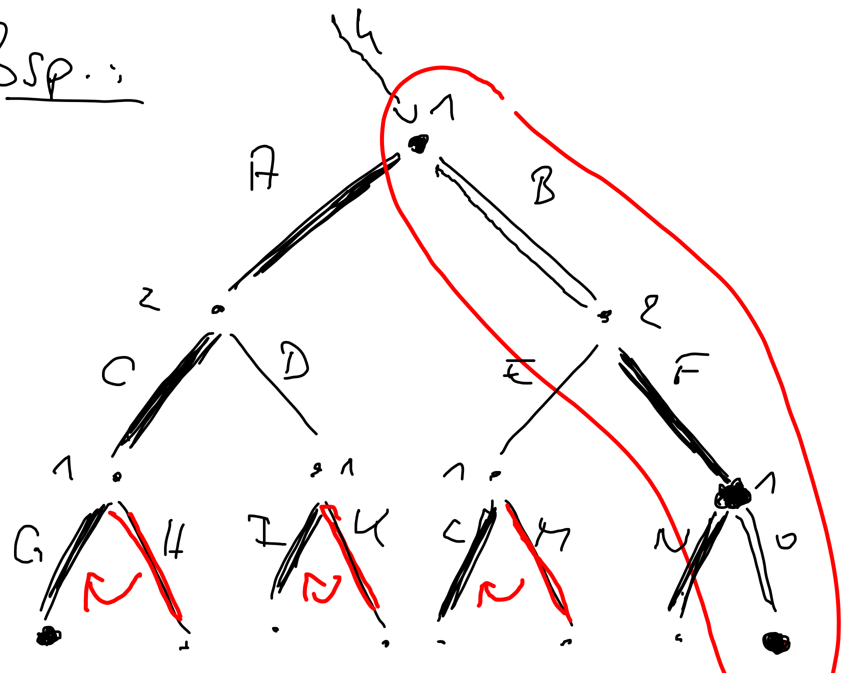
„$\Leftarrow$": Angenommen, s^* ist kein TPG.

Dann ex. Historie h und Spieler $i \in N$, so dass es eine profitable Abweichung s_i in $\Gamma(h)$ gibt.

O.B.d.A. ist die Anzahl der Historien h', s.d. $s_i(h') \neq s_i^*|_h(h')$ höchstens so groß ist wie die Länge der längsten Historie in $\Gamma(h)$, also insbesondere endlich wg. endl. Horizont.

Beweis zum oBdA.: Angenommen, s_i ist eine profitable Abweichung, für die das nicht gilt. Konstruiere dann aus s_i eine profitable Abweichung $\hat{s}_i$, derselben Spieler, für den das gilt, weil alle Historien h' mit $\hat{s}_i(h') \neq s_i^*|_h(h')$ auf <u>einem</u> Pfad im Spielbaum liegen.

<u>Bsp.:</u>



$s_1^*|_h = AGILN$

$s_2^*|_h = CF$

Angen.: $s_1 = BHKMO$ wäre profitable Abweichung von Sp. 1

Dann ist $\hat{s}_1 = BGILO$ auch eine profitable Abweichung von Sp. 1. $\hat{s}_1$ unterscheidet sich nur an <u>zwei</u> Historien von $s_1^*|_h$, während die längste Historie in $\Gamma(h)$ Länge <u>drei</u> hat.

$\longrightarrow$ OBdA-Annahme gerechtfertigt.

Anzahl der Historien h' mit $s_i(h') \neq s_i^*|_h(h')$ endlich.

Also ex. eine profitable Abweichung s_i in $\Gamma(h)$ so dass die Anzahl der Historien h' mit $s_i(h') \neq s_i^*|_h(h')$ minimal ist. Wähle eine solche Strategie s_i.

Sei dann h^* die längste Historie in $\Gamma(h)$ mit $s_i(h^*) \neq s_i^*|_h(h^*)$. Dann ist die initiale Historie in $\Gamma(h, h^*)$ die einzige, in der sich $s_i|_{h^*}$ von $s_i^*|_{(h,h^*)}$ unterscheidet. Außerdem ist $s_i|_{h^*}^{*}$ eine profitable Abweichung, da gefordert, dass h^* die <u>längste</u> Historie in $\Gamma(h)$ mit $s_i(h^*) \neq s_i^*|_h(h^*)$. Also ist $\Gamma(h, h^*)$ das ~~[illegible]~~ gesuchte Teilspiel.