Spieltheorie

Extensive Spiele

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Bernhard Nebel und Robert Mattmüller
Arbeitsgruppe Grundlagen der Künstlichen Intelligenz
14. Mai 2012

Extensive Spiele mit perfekter Information

Extensive Spiele

- Bisher: Alle Spieler ziehen gleichzeitig, dann steht Ausgang fest.
- Häufig: mehrere Züge hintereinander – mit strategischen Spielen nicht ohne weiteres modellierbar.
- Extensive Spiele (mit perfekter Information) modellieren solche Situationen durch Spielbäume.
- Strategien: Abbildungen von Entscheidungspunkten im Spielbaum auf zu spielende Aktionen.

Extensive Spiele

Def.: Extensive Spiele mit perfekter Information

Ein extensives Spiel mit perfekter Information besteht aus:

- Einer endlichen nicht-leeren Menge N von Spielern.
- Einer Menge H (Historien) von Sequenzen so dass:
  - $\langle\rangle \in H$,
  - falls $\langle a^1, \dots, a^k \rangle \in H$ (wobei $k = \infty$ sein kann) und $l < k$, dann ist auch $\langle a^1, \dots, a^l \rangle \in H$, und
  - falls für eine unendliche Sequenz $\langle a^i \rangle_{i=1}^{\infty}$ gilt, dass $\langle a^i \rangle_{i=1}^{k} \in H$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann auch $\langle a^i \rangle_{i=1}^{\infty} \in H$.

  Alle unendlichen Historien und alle Historien $\langle a^i \rangle_{i=1}^{k} \in H$, für die es kein a^{k+1} gibt, so dass $\langle a^i \rangle_{i=1}^{k+1} \in H$, heißen terminale Historien Z. Elemente einer Historie heißen Aktionen.

Extensive Spiele

Def.: Extensive Spiele mit perfekter Information (Forts.)

- Einer Spielerfunktion $P : H \setminus Z \to N$, die bestimmt, welcher Spieler nach einer Historie als nächster am Zug ist.
- Für jeden Spieler $i \in N$ einer Auszahlungsfunktion $u_i : Z \to \mathbb{R}$ auf der Menge der terminalen Historien.

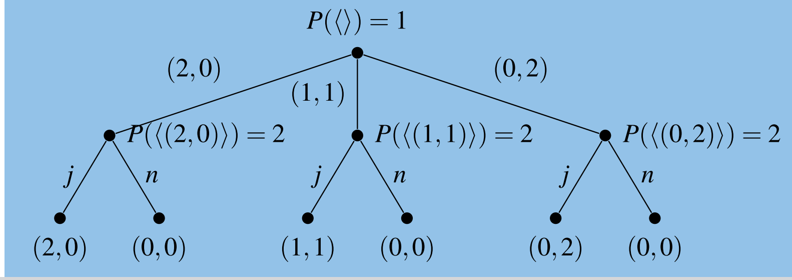
Das Spiel heißt endlich, wenn H endlich ist. Es hat einen endlichen Horizont, falls die Länge der Historien nach oben beschränkt ist.

Abkürzung: Im Weiteren „Extensive Spiele mpl".

Extensive Spiele

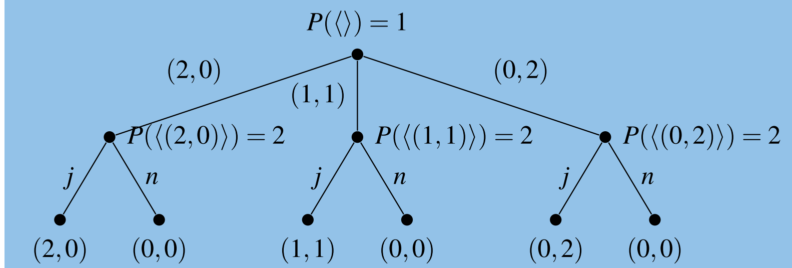
Beispiel: Verteilungsspiel

- Aufteilung zweier gleicher Objekte.
- Spieler 1 schlägt Aufteilung vor.
- Spieler 2 nimmt an oder lehnt ab.
  - Bei Annahme: Aufteilung wie vorgeschlagen.
  - Bei Ablehnung: Keiner erhält etwas.



Extensive Spiele

Beispiel: Verteilungsspiel, formal



- $N = \{1,2\}$
- $H = \{\langle\rangle, \langle(2,0)\rangle, \langle(1,1)\rangle, \langle(0,2)\rangle, \langle(2,0),j\rangle, \langle(2,0),n\rangle, \dots\}$
- $P(\langle\rangle) = 1$, $P(h) = 2$ für alle $h \in H \setminus Z$ mit $h \neq \langle\rangle$
- $u_1(\langle(2,0),j\rangle) = 2$, $u_2(\langle(2,0),j\rangle) = 0$, usw.

Extensive Spiele

Notation:

Sei $h = \langle a^1, \dots, a^k \rangle$ eine Historie und a eine Aktion.

- Dann ist (h,a) die Historie $\langle a^1, \dots, a^k, a \rangle$.
- Falls $h' = \langle b^1, \dots, b^l \rangle$, dann ist (h,h') die Historie $\langle a^1, \dots, a^k, b^1, \dots, b^l \rangle$.
- Die Menge der Aktionen, aus denen der Spieler $P(h)$ nach einer Historie $h \in H \setminus Z$ auswählen kann, notieren wir als

$$A(h) = \{a \mid (h,a) \in H\}.$$

Strategien

Def.: Strategien in extensiven Spielen mpI

Eine Strategie eines Spielers i in einem extensiven Spiel mpI $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ist eine Funktion s_i, die jeder Historie $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = i$ eine Aktion aus $A(h)$ zuweist.

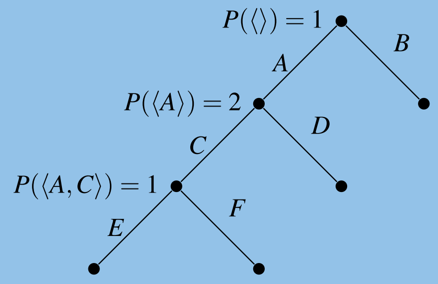
Notation (für endliche Spiele):

Eine Strategie für einen Spieler wird notiert als Folge von Aktionen an Entscheidungspunkten, die in Breitensuche-Reihenfolge besucht werden.

Strategien

Extensive Spiele

Beispiel: Strategienotation in einem endlichen Spiel



- Strategien für Spieler 1: AE, AF, BE und BF
- Strategien für Spieler 2: C und D.

Ergebnis

Extensive Spiele

Def.: Ergebnis

Das Ergebnis $O(s)$ für ein Strategieprofil $s = (s_i)_{i \in N}$ ist die (möglicherweise unendliche) terminale Historie $h = \langle a^i \rangle_{i=1}^k$ (mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), für die gilt, dass für alle $l \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq l < k$:

$$s_{P(\langle a^1, \ldots, a^l \rangle)}(\langle a^1, \ldots, a^l \rangle) = a^{l+1}.$$