

Bernhard Nebel und Robert Mattmüller
Arbeitsgruppe Grundlagen der Künstlichen Intelligenz
14. Mai 2012

Nash-Gleichgewichte in endlichen Nullsummenspielen

- Existenz nach Satz von Nash
- Nach Satz über Zusammenhang zwischen Nash-Gleichgewichten und Paaren von Maximimierern: Es genügt, Paare von Maximimierern zu suchen.
- Technik: Lineares Programm aufstellen und lösen

Algorithmen

Kodierung als Lineares Programm

- Seien A_1 und A_2 endlich.
- Spieler 1 sucht gemischte Strategie α_1 .
- Für jedes α_1 von Spieler 1:
 - Bestimme Nutzen bei bester Antwort von Spieler 2,
 - maximiere darüber.

Constraints:

$$\alpha_1(a_1) \geq 0 \quad \text{für alle } a_1 \in A_1$$

$$\sum_{a_1 \in A_1} \alpha_1(a_1) = 1$$

$$U_1(\alpha_1, a_2) = \sum_{a_1 \in A_1} \alpha_1(a_1) \cdot u_1(a_1, a_2) \geq u \quad \text{für alle } a_2 \in A_2$$

Maximiere u .

- Lösung dieses LPs ist Maximinierer für Spieler 1.
- Lösung eines analogen LPs liefert Maximinierer für Spieler 2.

Algorithmen
Nullsummenspiele
Allgem. Spiele
Komplexität

Beispiel: Elfmeterspiel

		Schütze	
		L	R
Torhüter	L	1, -1	-1, 1
	R	-1, 1	1, -1

LP für Spieler 1: Maximiere u unter den Bedingungen

$$\alpha_1(L) \geq 0$$

$$\alpha_1(R) \geq 0$$

$$\alpha_1(L) + \alpha_1(R) = 1$$

$$\alpha_1(L) - \alpha_1(R) \geq u$$

$$-\alpha_1(L) + \alpha_1(R) \geq u$$

Algorithmen
Nullsummenspiele
Allgem. Spiele
Komplexität

- Alternative Kodierung möglich, da bei Nullsummenspielen, die ein Nash-Gleichgewicht besitzen, Maximinierung und Minimaxierung das gleiche Ergebnis liefern.
- LP mit Ungleichungen

$$U_1(a_1, \alpha_2) \leq u \quad \text{für alle } a_1 \in A_1$$

aufstellen und u minimieren. Für α_2 entsprechend.

Algorithmen
Nullsummenspiele
Allgem. Spiele
Komplexität

- Für allgemeine Spiele funktioniert LP-Methode nicht.
- Benutze stattdessen Instanzen des **Linear Complementarity Problem** (LCP):
 - lineare (Un-)Gleichungen wie bei LPs
 - zusätzliche Bedingungen der Form $x_i \cdot y_i = 0$ (oder äquiv. $x_i = 0 \vee y_i = 0$) für Variablen $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ und $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ und $i \in \{1, \dots, k\}$
 - **keine** Optimierungsbedingung
- Mit LCPs sind Nash-Gleichgewichte für beliebige Zwei-Personen-Matrixspiele beschreibbar.

Algorithmen
Nullsummenspiele
Allgem. Spiele
Komplexität

Seien A_1 und A_2 endlich und (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht mit Nutzenprofil (u, v) . Dann:

$$u - U_1(a_1, \alpha_2) \geq 0 \quad \text{für alle } a_1 \in A_1 \quad (1)$$

$$v - U_2(\alpha_1, a_2) \geq 0 \quad \text{für alle } a_2 \in A_2 \quad (2)$$

$$\alpha_1(a_1) \cdot (u - U_1(a_1, \alpha_2)) = 0 \quad \text{für alle } a_1 \in A_1 \quad (3)$$

$$\alpha_2(a_2) \cdot (v - U_2(\alpha_1, a_2)) = 0 \quad \text{für alle } a_2 \in A_2 \quad (4)$$

$$\alpha_1(a_1) \geq 0 \quad \text{für alle } a_1 \in A_1 \quad (5)$$

$$\sum_{a_1 \in A_1} \alpha_1(a_1) = 1 \quad (6)$$

$$\alpha_2(a_2) \geq 0 \quad \text{für alle } a_2 \in A_2 \quad (7)$$

$$\sum_{a_2 \in A_2} \alpha_2(a_2) = 1 \quad (8)$$

Algorithmen
Nullsummenspiele
Allgem. Spiele
Komplexität

Bemerkungen zur Kodierung:

- in (3) und (4): etwa $\alpha_1(a_1) \cdot (u - U_1(a_1, \alpha_2)) = 0$ gdw. $\alpha_1(a_1) = 0$ oder $u - U_1(a_1, \alpha_2) = 0$. Das gilt in jedem Nash-Gleichgewicht, denn
 - falls $a_1 \notin \text{supp}(\alpha_1)$, dann $\alpha_1(a_1) = 0$, und
 - falls $a_1 \in \text{supp}(\alpha_1)$, dann $a_1 \in B_1(\alpha_2)$, also $U_1(a_1, \alpha_2) = u$.
- Die obige LCP-Formulierung kann mit zusätzlichen Variablen in LCP-Normalform umgeformt werden.

Algorithmen
Nullsummenspiele
Allgem. Spiele
Komplexität

Theorem

Ein Strategieprofil (α_1, α_2) in gemischten Strategien mit Auszahlungsprofil (u, v) ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn es eine Lösung der LCP-Kodierung über (α_1, α_2) und (u, v) ist.

Beweis

- Nash-Gleichgewichte sind Lösungen des LCPs: klar wegen Support-Lemma.
- Lösungen des LCPs sind Nash-Gleichgewichte: Sei $(\alpha_1, \alpha_2, u, v)$ eine Lösung des LCPs. Wegen (5) bis (8) sind α_1 und α_2 gemischte Strategien. (...)

Algorithmen
Nullsummenspiele
Allgem. Spiele
Komplexität

Beweis (Forts.)

- (...) Wegen (1) ist u mindestens die maximale Auszahlung über alle möglichen reinen Antworten, wegen (3) ist u genau die maximale Auszahlung. Ist $\alpha_1(a_1) > 0$, dann hat die Auszahlung für Spieler 1 als Reaktion auf α_2 wegen (3) den Wert u . Mit der Linearität des erwarteten Nutzens folgt, dass α_1 eine beste Antwort auf α_2 ist. Analog zeigt man, dass auch α_2 eine beste Antwort auf α_1 und somit (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht mit Auszahlung (u, v) ist. \square

Algorithmen
Nullsummenspiele
Allgem. Spiele
Komplexität

Naiver Algorithmus:

Zähle alle $(2^n - 1) \cdot (2^m - 1)$ möglichen Paare von Supportmengen auf. Für jedes solche Paar $(\text{supp}(\alpha_1), \text{supp}(\alpha_2))$:

- Konvertiere das LCP in ein lineares Programm:
 - Lineare (Un-)Gleichungen bleiben erhalten.
 - Bedingungen der Form $\alpha_1(a_1) \cdot (u - U_1(a_1, \alpha_2)) = 0$ werden durch eine neue lineare Gleichung ersetzt:
 - $u - U_1(a_1, \alpha_2) = 0$, falls $a_1 \in \text{supp}(\alpha_1)$ und
 - $\alpha_1(a_1) = 0$, sonst,
 Entsprechend für $\alpha_2(a_2) \cdot (v - U_2(\alpha_1, a_2)) = 0$.
 - Zielfunktion: maximiere konstante Nullfunktion.
- Wende Lösungsalgorithmus für lineare Programme auf das transformierte Programm an.

Algorithmen
Nullsummenspiele
Allgem. Spiele
Komplexität

- Laufzeit des naiven Algorithmus beträgt $O(p(n+m) \cdot 2^{n+m})$, wobei p ein geeignetes Polynom ist.
- In der Praxis besser geeignet: Lemke-Howson-Algorithmus.
- Komplexität:
 - unbekannt, ob $\text{LCP SOLVE} \in \text{P}$.
 - $\text{LCP SOLVE} \in \text{NP}$ klar (naiver Algorithmus als nichtdeterministischer Polynomialzeitalgorithmus).

Algorithmen
Nullsummenspiele
Allgem. Spiele
Komplexität

Komplexität

Algorithmen
Komplexität

Komplexität der Nash-Gleichgewichts-Berechnung

Theorem

Zu entscheiden, ob ein Nash-Gleichgewicht existiert, bei dem Spieler 1 eine Auszahlung von mindestens k erhält, ist NP-schwer. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen. □

Algorithmen
Komplexität

Def.: Pareto-Optimalität

Ein Nash-Gleichgewicht hat ein Pareto-optimales Auszahlungsprofil (v_1, \dots, v_n) , wenn es kein anderes Strategieprofil gibt, für dessen Auszahlungsprofil (v'_1, \dots, v'_n) gilt, dass $v'_i \geq v_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ und dass es ein $i = 1, \dots, n$ mit $v'_i > v_i$ gibt.

Algorithmen
Komplexität

Theorem

Zu entscheiden, ob es ein Nash-Gleichgewicht mit Pareto-optimalem Auszahlungsprofil gibt, ist NP-schwer. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen.

Theorem

Es ist NP-schwer zu entscheiden, ob es ein Nash-Gleichgewicht gibt, in dem ein Spieler eine bestimmte Aktion manchmal (bzw. nie) spielt. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen.

Algorithmen
Komplexität

Theorem

Es ist NP-schwer zu entscheiden, ob ein Spiel mindestens zwei Nash-Gleichgewichte besitzt.

Algorithmen
Komplexität