3. Gemischte Strategien

Def

Sei $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ ein strat. Spiel mit A_i höchstens abzählbar und u_i sind beschränkt. Sei $\Delta(A_i)$ die Menge der W.-Verteilungen über A_i. Ein $\alpha_i \in \Delta(A_i)$ ist eine <u>gemischte Strategie</u> ch G, wobei $\alpha_i(a_i)$ die Wahrscheinlichkeit für die Wahl von $a_i \in A_i$ ist.

Ein Profil $\alpha = (\alpha_i)_{i \in N} \in \prod \Delta(A_i)$ induziert eine W.-Verteilung auf $A = \prod A_i$:

$$p(a) = \prod_i \alpha_i(a_i)$$

Bsp

	K	Z
K	1, -1	-1, 1
Z	-1, 1	1, -1

Für Sp.1: $\alpha_1(K) = \frac{3}{4} \quad \alpha_1(Z) = \frac{1}{4}$

Für Sp.2: $\alpha_2(K) \ \frac{1}{4} \quad \alpha_2(Z) = \frac{3}{4}$

$$
\begin{array}{llll}
p(K,K) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16} & u_1(K,K) = +1 & \frac{3}{16} & \multirow{2}{*}{$\Big\} = \frac{-6}{16}$} \\
p(K,Z) = \frac{3}{4} \ \frac{3}{4} = \frac{9}{16} & u_1(K,Z) = -1 & \frac{-9}{16} & \\
p(Z,K) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} & u_1(\cancel{Z},K) = -1 & \frac{-1}{16} & \multirow{2}{*}{$\Big\} = \frac{2}{16}$} \\
p(Z,Z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16} & u_1(Z,Z) = +1 & \frac{3}{16} &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{16} = \frac{-1}{4}$$

Def. Sei $\alpha \in \prod_{i \in N} \Delta(A_i)$. Der erwartete Nutzen von α

$$U_i(\alpha) = \sum_{a \in A} \underbrace{\prod_{j \in N} \alpha_j(a_j)}_{p(a)} \cdot u_i(a)$$

Bsp

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{4} \quad \text{und} \quad U_2(\alpha_1, \alpha_2) = +\frac{1}{4}$$

Def (Support, Unterstützungsmenge)

Sei α_i eine gem. Strategie. Die Unterstützungsmenge (support) von α_i ist die Menge

$$\operatorname{supp}(\alpha_i) = \{ a_i \in A_i \mid \alpha_i(a_i) > 0 \}.$$

Lemma (Support)

Sei $G = (N, (A_i), (u_i))$ ein strat. Spiel mit A_i abzählbar und u_i beschränkt. Dann ist $\alpha^* \in \prod \Delta(A_i)$ ein NG in gemischten Strategien gdw. für jeden Spieler $i \in N$ jede reine Strategie $a_i \in A_i$ aus dem Support von α_i^* eine beste Antwort auf α_{-i}^* ist.

(α_1, α_2)

$\alpha_1(K) = \frac{3}{4}, \quad \alpha_1(Z) = \frac{1}{4} \qquad \alpha_1'(K) = \frac{1}{2} \quad \alpha_1'(Z) = \frac{1}{2}$

$\alpha_2(K) = \frac{1}{4}, \quad \alpha_2(Z) = \frac{3}{4} \qquad \alpha_2'(K) = \frac{1}{2} \quad \alpha_2'(Z) = \frac{1}{2}$

Bew: Sei α^* NG mit $a_i \in \operatorname{supp}(\alpha_i^*)$

$\Rightarrow$ Angenommen a_i ist keine beste Antwort auf α^*_{-i}

D.h. es ex. eine Strat. $a_i' \in A_i$ mit

$$U_i(\alpha^*_{-i}, a_i') > U_i(\alpha^*_{-i}, a_i)$$

Dann ist $\alpha_i'(a_i') = 1$ eine bessere Antwort auf α^*_{-i} als α_i^*. Dann kann α^* aber kein NG sein.

$\Leftarrow$ Angenommen α^* ist kein NG. Dann gibt es einen Spieler $i \in N$, so dass α_i' ex. mit

$$U_i(\alpha^*_{-i}, \alpha_i') > U_i(\alpha^*_{-i}, \alpha_i^*)$$

Wg. der Linearität von U_i muss es eine Strat. $a_i \in A_i$ die im Support von α_i' liegt, die einen höheren Nutzen als alle Strategien in α_i^* gibt. D.h. die $a_i \in \operatorname{supp}(\alpha_i^*)$ können keine besten Antworten sein. Widerspruch $\square$

Bem: Sei $G = (\{1,2\}, (A_i), (U_i))$ mit

$A_1 = \{O, U\}$, $A_2 = \{L, R\}$

Sei (α_1^*, α_2^*) ein NG mit $\alpha_1^*(O) = 1$ und $0 < \alpha_2^*(L) < 1$. So ist entweder (O, L) oder (O, R) ein NG.

Mit Supp-Lemma gilt: L und R sind beide beste Antworte auf O. Ist O weder beste Antwort auf L noch auf R ist, dann kann O nicht beste Antwort α_2^* sein. $\blacksquare$