2.5 Strikt kompetitiven Spielen

Def (strikt komp. / Nullsummen-Spiele)

Ein Nullsummen-Spiel (NSS) ist ein strat. Spiel $G = (\{1,2\}, (A_i), (u_i))$ mit $u_1(a) + u_2(a) = 0 \quad \forall a \in A$.

Bsp

	L	M	R	
O	8, −8	3, −3	−6, 6	−6
M	2, −2	−1, 1	3, −3	−1
U	−6, 6	4, −4	8, −8	−6
	−8	−4	−8	

Eine mögliche Technik: "Schaden begrenzen"

Maximiere über eigene Aktionen,
wobei bei jeder eigenen Aktion das Schlimmste
(= Minimum über alle Gegneraktionen) angenommen wird.

Def (Maximinimierer)

Sei G ein NSS. $x^* \in A_1$ heißt Maximinimierer (MM) für Sp. 1 falls

$$\min_y u_1(x^*, y) \geq \min_y u_1(x, y) \quad \forall x \in A_1$$

Für Sp. 2 entsprechend y^*.

Bezug zu NGs?

Bsp

	L	R	
O	1, −1	2, −2	1
U	−2, 2	−4, 4	−2
	−1	−2	
	1	2	

(O, L) ist NG und ein Paar von MM!

Lemma Sei $G = (\{1,2\}, (A_i), (u_i))$ ein NSS.

Dann gilt

$$\max_{y} \min_{x} u_2(x,y) = -\min_{y} \max_{x} u_1(x,y) \qquad |||$$

Bew:

Offensichtlich: $\min_{z} (-f(z)) = -\max_{z} (f(z))$ für reellwertige f's $(*)$

D.h. $\forall y \in A_2$:

$$-\min_{x} u_2(x,y) \overset{*}{=} \max_{x} (-u_2(x,y))$$

$$= \max_{x} u_1(x,y) \qquad (**)$$

$$\underline{\max_{y} \min_{x} u_2(x,y)} \overset{*}{=} -\min_{y} -[\min_{x} u_2(x,y)]$$

$$\overset{**}{=} \underline{-\min_{y} \max_{x} u_1(x,y)}$$

$\square$

Satz (über Minimaxierer)

Sei $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein NSS.

(a) Falls (x^*, y^*) ein NG ist, dann sind x^* und y^* MMs von Sp. 1 bzw. Sp. 2

(b) Falls (x^*, y^*) ein NG ist, dann gilt

$$\max_x \min_y u_1(x,y) = \boxed{\min_y \max_x u_1(x,y)} = u_1(x^*, y^*)$$

(c) Falls

$$\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y)$$

und x^* und y^* MM von Sp. 1 bzw. Sp. 2 sind, dann ist auch (x^*, y^*) ein NG.

__Bew:__

(a) (x^*, y^*) ist NG. Nach NG-Def:

$$u_2(x^*, y^*) \geq u_2(x^*, y) \qquad \forall y \in A_2$$

wg. $u_1 = -u_2$

$$u_1(x^*, y^*) \leq u_1(x^*, y) \qquad \forall y \in A_2$$

D.h.

$$u_1(x^*, y^*) = \min_y u_1(x^*, y) \leftarrow$$

$$\leq \max_x \min_y u_1(x, y) \qquad (+) \leftarrow$$

Aus Persp. von Sp. 1. Nach NG-Def:

$$u_1(x^*, y^*) \geq u_1(x, y^*) \qquad \forall x \in A_1$$

$$u_1(x^*, y^*) \geq \min_y u_1(x, y^*) \quad \forall x \in A_1$$

$$u_1(x^*, y^*) \geq \max_x \min_y u_1(x, y^*) \qquad (++) \leftarrow$$

T

$$u_1(x^*, y^*) = \max_x \min_y u_1(x,y)$$

x^* ist MM für Sp. 1.

Entsprechend für Sp. 2:

$$u_2(x^*, y^*) = \max_y \min_x u_2(x,y)$$

und y^* ist MM für Sp. 2 $\rightarrow$ (a)

$$u_1(x^*, y^*) = \max_x \min_y u_1(x,y) = -\left(\max_y \min_x u_2(x,y)\right)$$

$$= \min_y \max_x u_1(x,y) \Rightarrow \text{(b)}$$

(c) Sei x^* und y^* MM für Sp. 1 bzw. Sp. 2 und

$$\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y) := v^*$$

Wg. Lemma $-v^* = \max_y \min_x u_2(x,y)$.

Da x^* und y^* MM:

$$\boxed{u_1(x^*, \underline{y}) \geq v^* \quad \forall y \in A_2} \qquad (\circ)$$

$$u_2(\underline{x}, y^*) \geq -v^* \quad \forall x \in A_1 \qquad (\circ\circ)$$

Für die Werte $y = y^*$ und $x = x^*$ gilt

$$u_1(x^*, \underline{y^*}) \geq v^*$$

$$u_2(\underline{x^*}, y^*) \geq -v^* \leadsto u_1 = -u_2 \quad u_1(x^*, y^*) \leq v^*$$

D.h. $\boxed{u_1(x^*, y^*) = v^*}$ $(\circ\circ\circ)$

Aus $(\circ) + (\circ\circ\circ)$

$$u_1(x^*, y) \geq u_1(x^*, y^*) \quad \forall y \in A_2$$

wg. $u_1 = -u_2$

$$u_2(x^*, y) \leq u_2(x^*, y^*) \quad \forall y \in A_2$$

D.h. y^* ist beste Antwort auf x^*.

Mit $(\circ) + (\circ\circ)$ folgt

$$u_1(x, y^*) \leq u_1(x^*, y^*) \quad \forall x \in A_1$$

D.h. x^* ist auch beste Antwort y^*

D.h. (x^*, y^*) ist NG. $\square$

Korollar

1. Alle NG eines NSS haben die gleiche Auszahlung
2. Sind (x_1^*, y_1^*) und (x_2^*, y_2^*) NG eines NSS, dann sind auch (x_1^*, y_2^*) und (x_2^*, y_1^*) NG.