Einführung in die Modallogik

J.-G. Smaus, S. Wölfl
R. Mattmüller
Sommersemester 2011

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 11

Abgabe: 3. August 2011

Aufgabe 11.1 (Filtrierungen I)

Sei Γ eine endliche Menge von modallogischen Formeln, die unter Teilformelbildung abgeschlossen ist. Sei $\mathcal{M}$ ein Kripkemodell und $\mathcal{M}'$ eine Filtrierung von $\mathcal{M}$ durch Γ. Zeigen Sie, dass dann für alle $\gamma \in \Gamma$ und alle Zustände s von $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} \models_s \gamma \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{M}' \models_{s_\Gamma} \gamma \ .$$

Hinweis: Induktion über den Grad von γ.

Aufgabe 11.2 (Filtrierungen II)

Sei $\mathcal{M}$ ein Kripkemodell und $\mathcal{M}'$ eine Filtrierung von $\mathcal{M}$ durch eine Menge von modallogischen Formeln. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathcal{M}$ serial, so auch $\mathcal{M}'$.
(b) Ist $\mathcal{M}$ reflexiv, so auch $\mathcal{M}'$.
(c) Ist $\mathcal{M}'$ die *feinste* Filtrierung und ist $\mathcal{M}$ symmetrisch, so auch $\mathcal{M}'$.
(d) Ist $\mathcal{M}$ transitiv, so ist $\mathcal{M}'$ nicht notwendigerweise auch transitiv.
(e) Ist $\mathcal{M} = \langle S, R, V\rangle$ transitiv, Γ eine unter Teilformelbildung abgeschlossene endliche Formelmenge, $S' = S/{\sim_\Gamma}$, $s_\Gamma R' s'_\Gamma$ gdw. für alle φ, falls $\Diamond\varphi \in \Gamma$ und $\mathcal{M} \models_{s'} \varphi \vee \Diamond\varphi$, so $\mathcal{M} \models_s \Diamond\varphi$, sowie $s_\Gamma \in V'(p)$ gdw. $s \in V(p)$. Dann ist $\mathcal{M}' = \langle S', R', V'\rangle$ eine Filtrierung von $\mathcal{M}$ und ebenfalls transitiv.

Aufgabe 11.3 (QBF und Spiele)

Sei ψ eine QBF-Formel der Form $\psi = Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n.\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ für $i = 1, \dots, n$ und sei $\mathcal{G}(\psi)$ das Spiel, in dem der Spieler $\boldsymbol{\exists}$ ($\boldsymbol{\forall}$) zeigen will, dass ψ wahr (falsch) ist.
Das Spiel beginnt mit der leeren Variablenbelegung. Im i-ten Schritt ist Spieler $\boldsymbol{\exists}$ ($\boldsymbol{\forall}$) am Zug, falls $Q_i = \exists$ ($\forall$), und wählt einen Wahrheitswert für x_i. Das Spiel endet, wenn jeder Variablen ein Wert zugewiesen wurde. Der Gewinner ist $\boldsymbol{\exists}$, wenn die konstruierte Belegung φ erfüllt, und $\boldsymbol{\forall}$, sonst. Eine Strategie eines Spielers $p \in \{\boldsymbol{\exists}, \boldsymbol{\forall}\}$ ist eine Vorschrift, die jeder Situation, in der p am Zug ist, eine Aktion zuordnet, also eine Abbildung $\sigma_p\colon \alpha \mapsto \alpha \cup \{(x_i, b)\}$ von partiellen Belegungen α definiert für $x_1, \dots, x_{i-1}$ auf (partielle) Belegungen, x_i p-quantifiziert, $b \in \{0, 1\}$.

Zeigen Sie: ψ ist wahr gdw. Spieler $\boldsymbol{\exists}$ eine Gewinnstrategie in $\mathcal{G}(\psi)$ besitzt.