Einführung in die Modallogik

J.-G. Smaus, S. Wölfl
R. Mattmüller
Sommersemester 2011

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 7

Abgabe: 29. Juni 2011

Aufgabe 7.1 (Maximal konsistente Formelmengen)
Sei Σ eine maximal Λ-konsistente Menge. Zeigen Sie, dass dann folgendes gilt:

(a) Für jede $\mathcal{L}_\tau(P)$-Formel ist entweder $\varphi \in \Sigma$ oder $\neg\varphi \in \Sigma$.

(b) Für jede $\mathcal{L}_\tau(P)$-Formel φ ist $\neg\varphi \in \Sigma$ genau dann, wenn $\varphi \notin \Sigma$.

(c) Für alle $\mathcal{L}_\tau(P)$-Formeln φ und ψ ist $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ genau dann, wenn $\varphi \in \Sigma$ oder $\psi \in \Sigma$.

Aufgabe 7.2 (Kanonische Rahmen)
Sei Λ eine normale Modallogik, S^Λ die Menge aller maximal Λ-konsistenten Mengen von $\mathcal{L}_\tau(P)$-Formeln, und $\mathcal{F}^\Lambda = \langle S^\Lambda, \{R^\Lambda_\Diamond\}_{\Diamond\in\tau}\rangle$ mit $\Sigma\ R^\Lambda_\Diamond\ \Sigma'$ gdw. $\{\varphi \mid \Box\varphi \in \Sigma\} \subseteq \Sigma'$ der kanonische Rahmen von Λ. Zeigen Sie:

(a) Wenn $\mathbf{D} \in \Lambda$, dann ist $R^\Lambda_\Diamond$ serial.

(b) Wenn $\mathbf{E} \in \Lambda$, dann ist $R^\Lambda_\Diamond$ Euklidisch.

Aufgabe 7.3 (Induzierte normale Modallogiken)
Betrachten Sie die beiden Rahmen $\mathcal{F}_1 = \langle\{0\}, \{(0,0)\}\rangle$ und $\mathcal{F}_2 = \langle\{0\}, \emptyset\rangle$ sowie die durch diese beiden Rahmen induzierten normalen Modallogiken $\Lambda(\mathcal{F}_1)$ und $\Lambda(\mathcal{F}_2)$.

(a) Geben Sie Axiomatisierungen für $\Lambda(\mathcal{F}_1)$ und $\Lambda(\mathcal{F}_2)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass jede konsistente normale Modallogik in $\Lambda(\mathcal{F}_1)$ oder in $\Lambda(\mathcal{F}_2)$ (als Teilmenge) enthalten ist.

(c) In welchen der Logiken $\Lambda(\mathcal{F}_1)$ und $\Lambda(\mathcal{F}_2)$ sind **KTE**, **KBE** und **KL** enthalten?

(d) Zeigen Sie, dass es genau eine normale Modallogik gibt, die sowohl $\Lambda(\mathcal{F}_1)$ als auch $\Lambda(\mathcal{F}_2)$ (als Teilmenge) enthält.

Aufgabe 7.4 (Modalitäten in S4)
Betrachten Sie die sieben affirmativen **S4**-Modalitäten (vgl. Abb. 3.1 auf Seite 48 im Skript). Zeigen Sie, dass in **S4** diese sieben Modalitäten nicht weiter reduziert werden können, indem Sie für jede Kante $X \to X'$ in dem Diagramm aus Abb. 3.1 ein **S4**-Modell angeben, das zeigt, dass die umgekehrte Kante $X' \to X$ *nicht* in dem Diagramm liegt, dass also $X'p \to Xp$ *kein* **S4**-Theorem ist.