Einführung in die Modallogik

J.-G. Smaus, S. Wölfl
R. Mattmüller
Sommersemester 2011

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 6

Abgabe: 22. Juni 2011

Aufgabe 6.1 (Definierbare Rahmeneigenschaften)

(a) Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ definiert das Axiom $\mathbf{Alt}_n = \Box p_1 \vee \Box(p_1 \to p_2) \vee \cdots \vee \Box(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \to p_{n+1})$ die Menge aller Rahmen, in denen jeder Zustand höchstens n Nachfolgerzustände sieht.

(b) Zeigen Sie: Das Axiom $\mathbf{G1} = \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ definiert die Menge aller *konfluenten* Rahmen. Ein Rahmen $\mathcal{F}$ ist konfluent, wenn für alle $x, y_1, y_2 \in |\mathcal{F}|$ mit xRy_1 und xRy_2 ein $z \in |\mathcal{F}|$ existiert mit y_1Rz und y_2Rz.

Aufgabe 6.2 (Beweise in System **K**)

Beweisen Sie die folgenden **K**-Theoreme mittels aussagenlogischer Tautologien, Axiom **K** und Schlussregeln **US**, **MP** und **R-**$\Box$ (vgl. Lemma 3.7):

(a) wenn $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi \leftrightarrow \psi$, dann $\vdash_{\mathbf{K}} \Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi$

(b) $\vdash_{\mathbf{K}} (\Box\varphi \vee \Box\psi) \to \Box(\varphi \vee \psi)$

(c) $\vdash_{\mathbf{K}} (\Box\varphi \wedge \Diamond\psi) \to \Diamond(\varphi \wedge \psi)$

Aufgabe 6.3 (Natürliches Schließen I)

Beweisen Sie die **K**-Theoreme aus Aufgabe 6.2 mit dem in der Vorlesung angegebenen Kalkül des natürlichen Schließens.

Aufgabe 6.4 (Natürliches Schließen II)

Zeigen Sie für den Kalkül des natürlichen Schließens aus der Vorlesung, dass man für die Logik **KT** die Regel (Ax) durch die Regel (Refl) ersetzen kann, ohne dass sich die Relation $\vdash$ ändert:

$$(\mathrm{Ax})\ \frac{}{\Sigma \vdash \Box p \to p} \qquad\qquad (\mathrm{Refl})\ \frac{\Sigma \vdash \Box p}{\Sigma \vdash p}$$

Aufgabe 6.5 (Überabzählbare Modelle)

Betrachten Sie den modalen Ähnlichkeitstyp τ mit je einem nullstelligen Modaloperator $\bigcirc_r$ für jede nichtnegative reelle Zahl $r \in \mathbb{R}_0^+$ sowie einem einstelligen Modaloperator $\Diamond$. Geben Sie eine Menge Σ von $\mathcal{L}_\tau$-Formeln an, so dass Σ in einem Modell mit überabzählbar vielen Welten erfüllbar ist, aber in keinem Modell mit höchstens abzählbar vielen Welten.

Hinweis: Betrachten sie die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen als Menge der Welten und interpretieren Sie die $\bigcirc$-Operatoren so, dass $\bigcirc_r$ genau in Welt r wahr ist.