Einführung in die Modallogik

J.-G. Smaus, S. Wölfl
R. Mattmüller
Sommersemester 2011

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 4

Abgabe: 1. Juni 2011

Aufgabe 4.1 (PDL I)
Erläutern Sie, wie man folgende Programmkonstrukte in PDL ausdrücken kann:
(a) `if` φ `then` π_1 `else` π_2
(b) `while` φ `do` π
(c) `repeat` π `until` φ

Aufgabe 4.2 (PDL II)
Zur Erinnerung: $R_{\pi_1;\pi_2} = R_{\pi_1} \circ R_{\pi_2}$, $R_{\pi_1 \cup \pi_2} = R_{\pi_1} \cup R_{\pi_2}$, $R_{\pi^*} = R_\pi^*$ und $R_{\varphi?} = \{(s, s') \in S \times S \mid s = s' \text{ und } \mathcal{M} \models_s \varphi\}$.

(a) Zeigen Sie, dass folgende PDL-Formeln in jedem PDL-Modell gültig sind:

(i) $[\pi](p \to q) \to ([\pi]p \to [\pi]q)$
(ii) $[\pi_1; \pi_2]p \leftrightarrow [\pi_1][\pi_2]p$
(iii) $[\pi_1 \cup \pi_2]p \leftrightarrow ([\pi_1]p \wedge [\pi_2]p)$
(iv) $[q?]p \leftrightarrow (q \to p)$

(b) Zeigen Sie, dass $[\pi][\pi^*]p \to [\pi^*]p$ *nicht* in jedem PDL-Modell gültig ist.

Aufgabe 4.3 (Charakteristische Formeln)
Zur Erinnerung: Für einen Kripke-Rahmen $\mathcal{F}$ und eine Formel φ gilt $\mathcal{F} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathcal{M} \models \varphi$ für jedes Kripke-Modell $\mathcal{M}$ über $\mathcal{F}$.
Betrachten Sie die Rahmeneingenschaften (a) E = Irreflexivität und (b) E = Antisymmetrie. Zeigen Sie, dass es keine Formel φ der modallogischen Basissprache gibt, so dass $\mathcal{F} \models \varphi$ für jeden Rahmen $\mathcal{F}$ mit Eigenschaft E und $\mathcal{F}' \not\models \varphi$ für jeden Kripke-Rahmen $\mathcal{F}'$, der die Eigenschaft E nicht hat.
Tip: Argumentieren Sie damit, dass p-Morphismen Gültigkeit erhalten.

Aufgabe 4.4 (LTL und PDL)
Geben Sie eine Einbettung von LTL mit Until in PDL an. Genauer: Geben Sie eine geeignete PDL-Sprache an (welche Satzvariablen und atomaren Programme benötigen Sie?), ferner eine Übersetzung Φ, die rekursiv jede LTL-Formel in eine PDL-Formel ihrer Sprache übersetzt, und eine Abbildung, die jedem LTL-Modell, also jeder unendlichen Folge $s = s_1\, s_2 \ldots$ von Wahrheitsbelegungen $s_i : P \to \{0, 1\}$, ein PDL-Model $\mathcal{M} = \mathcal{M}(s)$ zuweist. Es soll dann gelten:

$$s \models \varphi \iff \mathcal{M}(s) \models_{s_1} \Phi(\varphi).$$

Tip: Beweisen Sie die stärkere Behauptung $s^i \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}(s) \models_{s_i} \Phi(\varphi)$ für $i \in \mathbb{N}$.