Einführung in die Modallogik

J.-G. Smaus, S. Wölfl
R. Mattmüller
Sommersemester 2011

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 3

Abgabe: 25. Mai 2011

Aufgabe 3.1 (Arrow-Logik)

Sei $\mathcal{S} = \mathcal{S}_X = \langle A, C, R, I \rangle$ der von $A = X \times X$ definierte quadratische Arrow-Rahmen über einer Menge $X \neq \emptyset$, d. h.

$$\begin{aligned} C &= \{((a_0, a_1), (b_0, b_1), (c_0, c_1)) \in A^3 \mid a_0 = b_0 \text{ und } a_1 = c_1 \text{ und } b_1 = c_0\} \\ R &= \{((a_0, a_1), (b_0, b_1)) \in A^2 \mid a_0 = b_1 \text{ und } a_1 = b_0\} \\ I &= \{(a_0, a_1) \in A \mid a_0 = a_1\}. \end{aligned}$$

Sei ferner φ eine Arrow-Formel, die nach der folgenden Konstruktionsregel aufgebaut ist:

$$\varphi ::= 1' \mid \otimes \varphi \mid (\varphi \circ \varphi) \mid \neg\varphi \mid (\varphi \leftrightarrow \varphi)$$

Dann gilt für alle $a \in A$ und Arrow-Formeln φ:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \models_a 1' &\text{ gdw. } Ia \\ \mathcal{S} \models_a \otimes\varphi &\text{ gdw. ex. } b \text{ mit } Rab \text{ und } \mathcal{S} \models_b \varphi \\ \mathcal{S} \models_a (\varphi \circ \psi) &\text{ gdw. ex. } b, c \text{ mit } Cabc \text{ und } \mathcal{S} \models_b \varphi \text{ und } \mathcal{S} \models_c \psi \\ \mathcal{S} \models_a \neg\varphi &\text{ gdw. } \mathcal{S} \not\models_a \varphi \\ \mathcal{S} \models_a (\varphi \leftrightarrow \psi) &\text{ gdw. } (\mathcal{S} \models_a \varphi \text{ gdw. } \mathcal{S} \models_a \psi) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Arrow-Formeln in jedem quadratischen Arrow-Rahmen $\mathcal{S}$ gültig sind:

(a) $\varphi \circ (\psi \circ \chi) \leftrightarrow (\varphi \circ \psi) \circ \chi$

(b) $1' \circ \varphi \leftrightarrow \varphi$

(c) $\otimes \otimes \varphi \leftrightarrow \varphi$

Aufgabe 3.2 (Substitutionslemma)

Eine *Substitution* für $\mathcal{L}_\tau(P)$ ist eine Abbildung $\sigma : P \to \mathcal{L}_\tau(P)$, die durch folgende rekursive Definition zu einer Funktion $\cdot^\sigma : \mathcal{L}_\tau(P) \to \mathcal{L}_\tau(P)$ erweitert werden kann:

$$\begin{aligned}
p^\sigma &:= \sigma(p) \quad \text{für } p \in P \\
\bot^\sigma &:= \bot \\
(\neg\varphi)^\sigma &:= \neg\varphi^\sigma \\
(\varphi \vee \psi)^\sigma &:= \varphi^\sigma \vee \psi^\sigma \\
\triangle_i^\sigma &:= \triangle_i \\
(\Diamond_i \varphi)^\sigma &:= \Diamond_i \varphi^\sigma \\
\triangle_i(\varphi_1, \dots, \varphi_n)^\sigma &:= \triangle_i(\varphi_1^\sigma, \dots, \varphi_n^\sigma)
\end{aligned}$$

Sei $\sigma : P \to \mathcal{L}_\tau(P)$ eine Substitution und $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ ein $\mathcal{L}_\tau(P)$-Modell, und sei $\mathcal{M}^\sigma$ das Modell $\langle \mathcal{F}, V^\sigma \rangle$, wobei V^σ definiert ist durch $V^\sigma(p) := \{s \in |\mathcal{F}| : \mathcal{M} \models_s \sigma(p)\}$.

(a) Zeigen Sie durch strukturelle Induktion über den Aufbau von $\mathcal{L}_\tau(P)$-Formeln, dass für alle $\mathcal{L}_\tau(P)$-Formeln φ und alle Zustände $s \in |\mathcal{F}|$

$$\mathcal{M}^\sigma \models_s \varphi \text{ gdw. } \mathcal{M} \models_s \varphi^\sigma.$$

(b) Zeigen Sie: Ist φ gültig und ist $\sigma : P \to \mathcal{L}_\tau(P)$ eine Substitution, so ist auch φ^σ gültig.

Aufgabe 3.3 (Linearzeit-Temporallogik)

Betrachten Sie Beispiel 2.12 aus der Vorlesung:
Sei $s = s_1\, s_2 \dots$ eine unendliche Folge von Wahrheitsbelegungen $s_i : P \to \{0, 1\}$. Für $i > 1$ sei $s[i]$ der Zustand s_i und s^i das Suffix von s, das in s_i beginnt, also $s^i := s_i\, s_{i+1} \dots$. Die Semantik von LTL ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
s \models p &\iff s[1](p) = 1 \\
s \models \neg\varphi &\iff s \not\models \varphi \\
s \models \varphi \vee \psi &\iff s \models \varphi \text{ oder } s \models \psi \\
s \models \mathsf{F}\varphi &\iff s^i \models \varphi \text{ für ein } i \geq 1 \\
s \models \mathsf{X}\varphi &\iff s^2 \models \varphi
\end{aligned}$$

Sei $\mathcal{M}$ das Kripke-Modell mit $S = \mathbb{N}$, $R_\mathsf{F} = \mathrm{Succ}^*$, $R_\mathsf{X} = \mathrm{Succ}$ und $V(p) = \{i \in \mathbb{N} : s[i](p) = 1\}$, wobei $\mathrm{Succ} := \{(i, i+1) : i \in \mathbb{N}\}$ die Nachfolgerrelation auf $\mathbb{N}$ bezeichnet.

Zeigen Sie, dass für jede LTL-Formel φ und jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathcal{M} \models_i \varphi \text{ gdw. } s^i \models \varphi.$$