Einführung in die Modallogik

J.-G. Smaus, S. Wölfl
R. Mattmüller
Sommersemester 2011

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 1

Abgabe: 11. Mai 2011

Aufgabe 1.1 (Zum Warmwerden: Anwendungen von Modallogiken)

Welche Art von Modallogik (doxastisch, epistemisch, temporal, ...) würden Sie zur Formalisierung der folgenden natürlichsprachlich formulierten Sachverhalte verwenden? Wie könnten die Formalisierungen aussehen?

(a) „Wann immer ein Request-Signal vorliegt, folgt darauf irgendwann ein Acknowledge-Signal."

(b) „Eine Mutter ist definiert als eine Frau, die mindestens ein Kind hat."

(c) „Nach Ausführung des Programms ‚`x:=0; if(x=0) {x+=1} else {x-=1}`' gilt $x = 42$."

(d) „Spieler 1 und 2 können gemeinsam eine Situation erzwingen, in der Spieler 1 alleine erzwingen kann, in Ballbesitz zu kommen, und Spieler 2 alleine erzwingen kann, in eine günstige Position zur Ballannahme zu kommen."

Aufgabe 1.2 (Erfüllbarkeit und Gültigkeit von Formeln)

Prüfen Sie bezüglich der Bewertungssemantik aus der Vorlesung die Erfüllbarkeit und Gültigkeit der folgenden Formeln:

(a) $(\Box p \lor \Box q) \land \Diamond(\neg p \land \neg q)$

(b) $\Box p \to \Diamond p$

(c) $\Box p \land \Box q \land \Diamond(\neg p \lor \neg q)$

(d) $\Box(p \to p)$

(e) $p \to \Box\Diamond p$

(f) $\Diamond(p \to q) \leftrightarrow (\Box p \to \Diamond q)$

Aufgabe 1.3 (Semantik)

In dieser Aufgabe betrachten wir eine Alternative zu der in der Vorlesung skizzierten relationalen Semantik. In der hier betrachteten Semantik wird für jede Welt $s \in S$ die Menge $\mathcal{F}_s$ aller Propositionen $P \subseteq S$ spezifiziert, die in dieser Welt „notwendig" sind. Dabei identifizieren wir Propositionen mit den Mengen von Welten, in denen sie wahr sind. $P \in \mathcal{F}_s$ bedeutet also gerade, dass P in s „notwendig" ist.

Um zu garantieren, dass, wann immer eine Proposition P notwendig wahr ist, auch alle aus ihr folgenden Propositionen notwendig wahr sind, dass Notwendigkeit mit logischer Konjunktion verträglich ist, und dass nicht notwendigerweise *falsch* gilt, arbeiten wir mit sogenannten *Mengenfiltern.*

Unter einem Mengenfilter auf einer Menge S versteht man eine nicht-leere Menge $\mathcal{F} \subseteq 2^S$ mit den folgenden Eigenschaften:

(F1) Ist $P \in \mathcal{F}$ und $P \subseteq Q \subseteq S$, so ist auch $Q \in \mathcal{F}$.

(F2) Ist $P \in \mathcal{F}$ und $Q \in \mathcal{F}$, so ist auch $P \cap Q \in \mathcal{F}$.

(F3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Ist S eine nicht-leere Menge, so ist ein *Filtersystem* auf S eine Familie $\mathcal{X} = (\mathcal{F}_s)_{s \in S}$ von Mengenfiltern auf S. Ein *Filtermodell* auf S ist ein Tripel $\mathcal{M} = (S, \mathcal{X}, V)$, wobei $\mathcal{X}$ ein Filtersystem auf S und V eine Funktion ist, die jeder Satzvariablen p eine Teilmenge $V(p) \subseteq S$ zuordnet. Wir definieren:

$$\begin{array}{rll}
\multicolumn{3}{l}{\mathcal{M}, s \models \top, \quad \mathcal{M}, s \not\models \bot, \quad \mathcal{M}, s \models p \text{ gdw. } s \in V(p) \text{ für Satzvariable } p} \\
\mathcal{M}, s \models \neg\varphi & \text{gdw.} & \mathcal{M}, s \not\models \varphi \\
\mathcal{M}, s \models \varphi \wedge \psi & \text{gdw.} & \mathcal{M}, s \models \varphi \text{ und } \mathcal{M}, s \models \psi \\
\mathcal{M}, s \models \varphi \vee \psi & \text{gdw.} & \mathcal{M}, s \models \varphi \text{ oder } \mathcal{M}, s \models \psi \\
\mathcal{M}, s \models \varphi \to \psi & \text{gdw.} & \mathcal{M}, s \not\models \varphi \text{ oder } \mathcal{M}, s \models \psi \\
\mathcal{M}, s \models \varphi \leftrightarrow \psi & \text{gdw.} & (\mathcal{M}, s \models \varphi \text{ gdw. } \mathcal{M}, s \models \psi) \\
\mathcal{M}, s \models \Box\varphi & \text{gdw.} & [\varphi]^{\mathcal{M}} := \{s' \in S \mid \mathcal{M}, s' \models \varphi\} \in \mathcal{F}_s \\
\mathcal{M}, s \models \Diamond\varphi & \text{gdw.} & [\neg\varphi]^{\mathcal{M}} \notin \mathcal{F}_s
\end{array}$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln χ in jedem Filtersystem auf S gültig sind, dass also $\mathcal{M}, s \models \chi$ für alle Filtermodelle $\mathcal{M} = (S, \mathcal{X}, V)$ und Welten $s \in S$:

(i) $\neg\Box\bot$
(ii) $(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \leftrightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$
(iii) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Diamond\varphi \to \Diamond\psi)$

(b) Geben Sie jeweils ein Filtersystem an, welches zeigt, dass die folgenden Formeln nicht in jedem Filtersystem gültig sind:

(i) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
(ii) $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$
(iii) $(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \to \Diamond(\varphi \wedge \psi)$