Prinzipien der Wissensrepräsentation

B. Nebel, S. Wölfl, M. Ragni
R. Mattmüller
Universität Freiburg
Institut für Informatik
Sommersemester 2010

Übungsblatt 3

Abgabe: 10. Mai 2010

Aufgabe 3.1 (Polynomielle Hierarchie, 2+2 Punkte)
Zeigen Sie:

(a) Falls $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann gilt $\Sigma_k^p = \Sigma_l^p = \Pi_k^p = \Pi_l^p$ für alle $k, l \geq 1$.

(b) Falls $\Sigma_k^p = \Sigma_{k+1}^p$ für irgendein k, dann gilt $\Sigma_l^p = \Pi_l^p = \Sigma_k^p$ für *alle* $l > k$.

Aufgabe 3.2 (QBF und Spiele, 2 Punkte)
Sei ψ eine QBF-Formel mit n alternierenden Quantoren und quantorenfreier Matrix φ, also

$$\psi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n . \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad Q_i \in \{\exists, \forall\} \text{ für } i = 1, \dots, n,$$

und sei $\mathcal{G}(\psi)$ das Spiel, in dem der Spieler $\boldsymbol{\exists}$ zeigen will, dass ψ wahr ist, und der Spieler $\boldsymbol{\forall}$ dies widerlegen will. Das Spiel beginnt mit der leeren Belegung. Im i-ten Schritt ist Spieler $\boldsymbol{\exists}$ ($\boldsymbol{\forall}$) am Zug, falls $Q_i = \exists$ ($\forall$), und wählt einen Wahrheitswert für x_i. Das Spiel endet, wenn jeder Variablen ein Wert zugewiesen wurde. Der Gewinner ist $\boldsymbol{\exists}$, wenn die konstruierte Belegung φ erfüllt, und $\boldsymbol{\forall}$, sonst. Eine Strategie eines Spielers $p \in \{\boldsymbol{\exists}, \boldsymbol{\forall}\}$ ist eine Vorschrift, die jeder Situation, in der p am Zug ist, eine Aktion zuordnet, also eine Abbildung $\sigma_p \colon \alpha \mapsto \alpha \cup \{(x_i, b)\}$ von partiellen Belegungen α definiert für $x_1, \dots, x_{i-1}$ auf (partielle) Belegungen, x_i p-quantifiziert, $b \in \{0, 1\}$. Die Strategie ist eine Gewinnstrategie für p, wenn für jede Strategie des Gegners das Spiel, bei dem beide Spieler ihrer Strategie folgen, von p gewonnen wird.

Zeigen Sie: ψ ist wahr gdw. Spieler $\boldsymbol{\exists}$ eine Gewinnstrategie in $\mathcal{G}(\psi)$ besitzt.

Aufgabe 3.3 (Modellierung in Modallogik, 2 Punkte)
Betrachten Sie eine Modallogik, in welcher der $\Box$-Operator epistemisch interpretiert wird, d. h. $\Box\varphi$ bedeutet „Agent $\mathbb{A}$gt weiß, dass φ gilt“ und $\Diamond\varphi$ bedeutet „Agent $\mathbb{A}$gt hält φ für möglich“. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn $\mathbb{A}$gt weiß, dass φ gilt, dann hält er ψ nicht für möglich.

(b) $\mathbb{A}$gt weiß, dass φ und ψ sich ausschließen.

(c) Wenn φ gilt, dann kann $\mathbb{A}$gt weder ψ noch ϑ ausschließen.

(d) $\mathbb{A}$gt weiß, dass er über φ nichts weiß.

Die Übungsblätter dürfen in Gruppen von zwei Studenten bearbeitet werden. Bitte schreiben Sie beide Namen auf Ihre Lösung.