Spieltheorie

B. Nebel
Sommersemester 2009

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 9

Abgabe: Dienstag, 7. Juli 2009

Aufgabe 9.1 (Wahlverfahren, 4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Wahlverfahren (zur Vereinfachung nehmen wir an, dass bei Gleichständen immer der Kandidat mit niedrigerem Index gewinnt):

Relative Mehrheitswahl: Gewählt ist der Kandidat, der mehr erste Plätze in den Präferenzrelationen der Wähler hat als jeder andere Kandidat.

Präferenz-Wahl: Solange noch mehr als ein Kandidat übrig ist, streiche den Kandidaten, der von den *wenigsten* Wählern auf den *ersten* Platz gewählt wurde und schränke die Präferenzrelationen der Wähler auf die verbleibenden Kandidaten ein. Gewählt ist der letzte verbleibende Kandidat.

Coombs-Wahl: Wie Präferenz-Wahl, jedoch wird immer der Kandidat gestrichen, der von den *meisten* Wählern auf den *letzten* Platz gewählt wurde.

Borda-Wahl: Ein Kandidat erhält von jedem der n Wähler $m - j$ Punkte, wenn dieser ihn auf Platz j gewählt hat. Gewonnen hat der Kandidat mit der höchsten Summe von Punkten.

Geben Sie Präferenzrelationen $\prec_1, \dots, \prec_n$ über einer Kandidatenmenge $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ an, so dass die oben genannten Wahlverfahren möglichst viele unterschiedliche Gewinner liefern. Sie erhalten einen Punkt pro unterschiedlichem Gewinner.

Aufgabe 9.2 (Soziale Entscheidungs- und Wohlfahrtsfunktionen, 1+3 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie gesehen, wie soziale Entscheidungsfunktionen $f : L^n \to A$ zu sozialen Wohlfahrtsfunktionen $F : L^n \to L$ erweitert werden können. In dieser Aufgabe wollen wir eine alternative Erweiterungsvorschrift analysieren. Dabei nehmen wir an, dass nicht nur eine soziale Entscheidungsfunktion $f : L^n \to A$ gegeben ist, sondern eine ganze Familie von sozialen Entscheidungsfunktionen $(f_R : L_R^n \to R)_{R \subseteq A}$ für alle Teilmengen $R \subseteq A$, wobei L_R die Menge aller linearen Ordnungen über R ist.[1] Ferner sei A endlich. Statt $\prec^S$ benötigen wir nun $\prec^{-R}$, das wie folgt definiert ist: Sei $R \subseteq A$ und $\prec \in L$. Dann bezeichnen wir mit $\prec^{-R}$ die Ordnung in $L_{A \setminus R}$, die wir erhalten, wenn alle Elemente in R aus $\prec$ entfernt und die restlichen Elemente „zusammengeschoben“ werden, d. h. $\prec^{-R} := \prec \cap ((A \setminus R) \times (A \setminus R))$.

Die alternative Erweiterungsvorschrift ist dann definiert als $F(\prec_1, \dots, \prec_n) = \prec$ mit $a_m \prec a_{m-1} \prec \cdots \prec a_2 \prec a_1$, wobei (1.) $R^0 := \emptyset$ und (2.) $a_k := f_{A \setminus R^{k-1}}(\prec_1^{-R^{k-1}}, \dots, \prec_n^{-R^{k-1}})$ und $R^k := R^{k-1} \cup \{a_k\}$ für $m := |A| \geq k \geq 1$.

[1] Beachten Sie, dass nahezu alle praktischen Wahlverfahren Familien von sozialen Entscheidungsfunktionen sind, weil sie in der Regel nicht nur für eine feste Anzahl von Wählern oder Kandidaten definiert sind.

(a) Beschreiben Sie in Worten, weshalb die alternative Erweiterung eine soziale Wohlfahrtsfunktion ist, also immer eine lineare Ordnung liefert.

(b) Wir nennen eine Familie von sozialen Wohlfahrtsfunktionen *natürlich*, wenn sie keine Fallunterscheidung bezüglich der Kandidatenmenge macht, also beispielsweise nicht f_R eine relative Mehrheitswahl und $f_{R'}$, $R' \neq R$, eine Borda-Wahl ist.
Geben Sie eine solche Familie $(f_R)_{R \subseteq A}$ an und zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass die aus der Vorlesung bekannte Erweiterungsvorschrift (angewandt auf f_A) und die alternative Erweiterungsvorschrift (angewandt auf $(f_R)_{R \subseteq A}$) – jeweils für die gleichen Wählerpräferenzen – nicht zur gleichen sozialen Wohlfahrtsfunktion F führen müssen.

Die Übungsblätter dürfen und sollten in Gruppen von zwei Studenten bearbeitet werden. Bitte schreiben Sie beide Namen auf Ihre Lösung.