Spieltheorie

Prof. Dr. Bernhard Nebel
Assistent: Dipl.-Inf. Malte Helmert

LaTeX-Umsetzung: Ingo Thon, Robert Mattmüller

{nebel, helmert, thon, mattmuel}@informatik.uni-freiburg.de

Sommersemester 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Was ist Spieltheorie?

Spieltheorie ist die Analyse strategischer Entscheidungssituationen, in denen mehrere Spieler miteinander interagieren.

Dabei ist das Resultat eines Spiels von den Entscheidungen der Mitspieler abhängig und alle Spieler sind sich dessen bewusst. Damit stellt sich die Frage nach dem Ergebnis, das sich ergibt, falls alle Spieler „rational" handeln, d.h. ihren (erwarteten) Nutzen maximieren, wobei sie davon ausgehen, dass ihre Mitspieler ebenso rational handeln.

Ursprünglich ist die Spieltheorie ein Gebiet der theoretischen Wirtschaftswissenschaften, neuerdings jedoch auch für Künstliche Intelligenz und Informatik von Interesse, wenn es darum geht, dezentrale, heterogene Systeme von egoistischen Agenten zu modellieren. Während Lösungsbegriffe für Spiele bereits bekannt sind, sind noch viele algorithmische Fragen zu behandeln. Da die Annahme der Rationalität im Fall von künstlichen Agenten berechtigter ist als im Fall natürlicher Agenten, ist die Spieltheorie für die Informatik unter Umständen noch sinnvoller und interessanter als für die Wirtschaftswissenschaft.

Beispiel 1 (Anflugmanagement an Flughäfen). Heute: First-come-first-served, besser wäre aber ein Anflugscheduling unter Berücksichtigung der verbleibenden Flugbenzinmengen der ankommenden Flugzeuge. Bei mehreren Fluglinien werden Online-Verhandlungen notwendig.

1.2 Gebiete der Spieltheorie

Zu den Gebieten der Spieltheorie gehören unter anderem sogenannte **strategische Spiele (Normalform-Spiele)**, bei denen die Strategien vor Beginn des Spiels festgelegt werden und das Spielergebnis aus der Strategiekombination resultiert.

Beispiel 2 (Gefangenendilemma). Zwei Gefangene werden getrennt voneinander verhört und haben die Wahl, die ihnen vorgeworfene Tat zu gestehen und dabei den anderen Gefangenen zu belasten oder zu schweigen. Mögliche Ausgänge sind dann, dass

1. beide schweigen, worauf sie mit je drei Monaten Haft bestraft werden,
2. nur einer gesteht, der andere aber schweigt, woraufhin der Kronzeuge frei kommt, während der „Schweiger" zu zehn Jahren Haft verurteilt wird, oder dass
3. beide gestehen, was für beide eine dreijährige Haftstrafe bedeutet.

Daneben werden **extensive Spiele**, d.h. Spiele mit mehreren Zügen, wie etwa Schach oder wiederholte strategische Spiele, untersucht.

Es wird zwischen Spielen mit **vollständigen** und **unvollständigen Informationen** unterschieden, wobei etwa bei Kartenspielen den Spielern in der Regel nur unvollständige Informationen vorliegen.

Koalitions- oder Verhandlungsspiele modellieren Situationen wie Verhandlungen, Verteilungen von Gewinnen oder Wahlen.

In der **Implementierungstheorie (Mechanismusdesign)** betrachtet man Spiele nicht nur aus der Sicht der Spieler, sondern auch aus der eines „Spieledesigners“, der die Spielregeln so festlegen will, dass der Gesamtnutzen aller Spieler optimiert wird.

Die wichtigsten **Lösungskonzepte** der Spieltheorie sind die Elimination dominierter Strategien, Nash-Gleichgewichte und weitere Gleichgewichtsbegriffe.

2 Strategische Spiele

Definition 3 (Strategisches Spiel). Ein **strategisches Spiel** $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ besteht aus

- einer endlichen **Spielermenge** N,
- für jeden Spieler $i \in N$ einer nichtleeren Menge A_i (von **Aktionen/Strategien**) und
- für jeden Spieler $i \in N$ einer **Auszahlungsfunktion** $u_i : A \to \mathbb{R}$, wobei

$$A = \bigtimes_{i \in N} A_i.$$

G heißt endlich, falls A endlich ist.

Oft wird statt einer Auszahlungsfunktionen eine **Präferenzrelation** $\succeq_i$ für Spieler i genutzt:

$$a \succeq_i b \text{ gdw. } u_i(a) \geq u_i(b)$$

Endliche strategische Spiele werden oft in **Matrixform** angegeben, wie etwa das folgende Spiel mit zwei Spielern und je zwei möglichen Aktionen. Spieler 1 ist der Zeilenspieler, Spieler 2 der Spaltenspieler. Bei den Auszahlungen ist jeweils der erste Wert der Nutzen für Spieler 1, der zweite Wert der Nutzen für Spieler 2.

Spieler 2

		L	R
Spieler 1	T	w_1, w_2	x_1, x_2
	B	y_1, y_2	z_1, z_2

Wählt Spieler 1 Aktion T und Spieler 2 Aktion L, dann erhält Spieler 1 die Auszahlung w_1, Spieler 2 erhält die Auszahlung w_2.

Beispiel 4 (Gefangenendilemma). S sei die Strategie, zu schweigen, G die Strategie, zu gestehen. Die Auszahlungen sind in Gefängnismonaten angegeben.

	S	G
S	$-3, -3$	$-120, \ 0$
G	$0, -120$	$-36, -36$

Beispiel 5 (Falke und Taube). Die Spieler können sich in einem Kampf (etwa um Nahrung) wie ein Falke (F) oder wie eine Taube (T) verhalten. Treffen zwei Tauben aufeinander, teilen sie sich den Nutzen, trifft ein Falke auf eine Taube, gewinnt der Falke und sichert sich einen großen Teil des Nutzens, treffen aber zwei Falken aufeinander, so geht in dem Kampf der beiden der gesamte Nutzen verloren.

	T	F
T	$3,3$	$1,4$
F	$4,1$	$0,0$

Beispiel 6 (Matching Pennies). Zwei Spieler wählen jeweils Kopf (K) oder Zahl (Z). Wählen beide das gleiche, gewinnt Spieler 1 einen Euro von Spieler 2, wählen sie etwas unterschiedliches, erhält Spieler 2 einen Euro von Spieler 1.

	K	Z
K	$1,-1$	$-1,\ \ 1$
Z	$-1,\ \ 1$	$1,-1$

Beispiel 7 (Bach oder Strawinsky). Zwei Personen wollen gemeinsam ein Konzert besuchen, wobei eine der beiden Personen Bach bevorzugt, während die andere Strawinsky vorzieht. Beiden ist es wichtiger, in das gleiche Konzert zu gehen wie der Partner, als ihr Lieblingskonzert zu besuchen. Sei B die Aktion, das Bach-Konzert zu besuchen, S die Aktion, in das Strawinsky-Konzert zu gehen.

		Strawinsky-Fan	
		B	S
Bach-Fan	B	$2,1$	$0,0$
	S	$0,0$	$1,2$

2.1 Dominierte Strategien

Notation 8. Sei $a = (a_i)_{i \in N}$ ein **Strategieprofil** ($a \in A = \times_{i \in N} A_i$). Dann ist $a_{-i} := (a_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$ und $(a_{-i}, a_i) = (a_j)_{j \in (N \setminus \{i\}) \cup \{i\}} = (a_j)_{j \in N} = a$.

Definition 9 (Strikt dominierte Strategie). Eine Aktion $a_j^* \in A_j$ im Spiel $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ heißt strikt dominiert, falls es eine Aktion $a_j' \in A_j$ gibt, so dass für alle $a \in A$ gilt:

$$u_j(a_{-j}, a_j') > u_j(a_{-j}, a_j^*)$$

Bemerkung 10. Es ist nicht rational, strikt dominierte Strategien zu spielen.

2.1.1 Iterative Elimination strikt dominierter Strategien

- Streiche die Strategien, die strikt dominiert sind, solange welche da sind.
- Bleibt nur ein Profil übrig, ist das die Lösung.

Beispiel 11. Streiche zunächst die von der zweiten Zeile strikt dominierte erste Zeile, danach die von der zweiten Spalte strikt dominierte erste Spalte:

	S	G
S	~~3,3~~	~~0,4~~
G	4,0	1,1

	S	G
G	~~4,0~~	1,1

Beispiel 12. Iterative Elimination strikt dominierter Strategien in drei Schritten:

	L	R
T	2,1	0,0
M	1,2	2,1
B	~~0,0~~	~~1,1~~

	L	R
T	2,1	~~0,0~~
M	1,2	~~2,1~~

	L
T	2,1
M	~~1,2~~

Bemerkung 13. Nur in den seltensten Fällen existiert strikte Dominanz.

Bemerkung 14. Das Ergebnis der iterativen Elimination ist bei strikter Dominanz eindeutig (unabhängig von der Reihenfolge der Elimination).

Definition 15 (Schwach dominierte Strategien). Eine Aktion $a_j^* \in A_j$ im Spiel $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ heißt schwach dominiert, falls es eine Aktion $a_j' \in A_j$ gibt, so dass für alle $a \in A$

$$u_j(a_{-j}, a_j') \geq u_j(a_{-j}, a_j^*)$$

und für mindestens ein $a \in A$

$$u_j(a_{-j}, a_j') > u_j(a_{-j}, a_j^*)$$

Beispiel 16. Das Ergebnis bei iterativer Elimination schwach dominierter Strategien ist im allgemeinen nicht eindeutig, sondern von der Eliminationsreihenfolge abhängig. Betrachte dazu folgendes Spiel:

	L	R
T	$2, 1$	$0, 0$
M	$2, 1$	$1, 1$
B	$0, 0$	$1, 1$

Eliminiert man zuerst T ($\leq$ M), dann L ($\leq R$), so hat jedes noch mögliche Ergebnis (RM oder RB) das Nutzenprofil $(1, 1)$. Die alternative Reihenfolge, bei der zuerst B ($\leq$ M), dann R ($\leq L$) eliminiert wird, führt hingegen zu dem Nutzenprofil $(2, 1)$.

2.2 Nash-Gleichgewichte

Nash-Gleichgewichte sind das meistbenutzte Lösungskonzept der Spieltheorie. Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Strategiekombination, in der kein Spieler durch Abweichung einen Vorteil erlangen kann.

Beispiel 17. Nash-Gleichgewichte bei Bach oder Strawinsky:

		Strawinsky-Fan	
		B	S
Bach-Fan	B	$2, 1$	$0, 0$
	S	$0, 0$	$1, 2$

Hier existieren zwei Nashgleichgewichte, nämlich (B, B) und (S, S).

Definition 18 (Nash-Gleichgewicht). Ein **Nash-Gleichgewicht (NG)** eines strategischen Spieles $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ist ein Profil $a^* \in A$ von Aktionen mit der Eigenschaft, dass für alle Spieler $i \in N$ gilt:

$$u_i(a^*) = u_i(a^*_{-i}, a^*_i) \geq u_i(a^*_{-i}, a_i) \qquad \text{für alle } a_i \in A_i.$$

Definition 19 (Nash-Gleichgewicht, alternativ). Sei $B_i(a_{-i})$ die Menge von Aktionen $a_i \in A_i$, die eine beste Reaktion auf a_{-i} sind, d.h.

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i \mid u_i(a_{-i}, a_i) \geq u_i(a_{-i}, a'_i) \text{ für alle } a'_i \in A_i\}.$$

Ein Nash-Gleichgewicht a^* ist ein Profil mit der Eigenschaft

$$a^*_i \in B_i(a^*_{-i}) \quad \text{für alle } i \in N.$$

Wir betrachten auch $B(a^*)$:

$$B(a^*) = \bigtimes_{i \in N} B_i(a^*_{-i})$$

Mit dieser Notation ist a^* ein Nash-Gleichgewicht gdw. $a^* \in B(a^*)$.

Beispiel 20. Im Gefangenendilemma gibt es genau ein Nash-Gleichgewicht:

	S	G
S	$3,3$	$0,4$
G	$4,0$	$\mathbf{1,1}$

Beispiel 21. Im Falke-und-Taube-Spiel gibt es zwei Nash-Gleichgewichte:

	Taube	Falke
Taube	$3,3$	$\mathbf{1,4}$
Falke	$\mathbf{4,1}$	$0,0$

Beispiel 22. Im Matching-Pennies-Spiel gibt es kein Nash-Gleichgewicht:

	Kopf	Zahl
Kopf	$1,-1$	$-1,\ \ 1$
Zahl	$-1,\ \ 1$	$1,-1$

Beispiel 23 (Auktionsspiel). Eine *Second Price Sealed Bid Auction* läuft wie folgt ab: Alle Auktionsteilnehmer geben ein geheimes Gebot für das zu versteigernde Objekt ab. Das höchste Gebot erhält den Zuschlag, wobei ein Betrag bezahlt werden muss, der dem *zweithöchsten* abgegebenen Gebot entspricht.

Formal ergibt sich folgendes Spiel $\langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$:

- $N = \{1, \dots, n\}$, wobei $n \geq 2$. Wir schreiben $v_i \in \mathbb{R}$ für den *Wert* (in Euro), den Spieler i dem zu versteigernden Objekt zumisst. Das Auktionsspiel wird durch die Werte v_i parametrisiert. Wir fordern, dass $v_1 > v_2 > \dots > v_n > 0$ gilt.
- Für alle $i \in N$ ist $A_i = \mathbb{R}^+$. Dabei entspricht $a_i \in A_i$ einem Gebot von a_i Euro.
- Die Nutzenfunktionen u_i sind wie folgt definiert: Erhält Spieler i den Zuschlag, so ist $u_i(a) = v_i - \max a_{-i}$. Der Spieler erhält das Objekt (Nutzen v_i), muss aber den höchsten von den anderen Spielern gebotenen Betrag bezahlen (Ausgabe $\max a_{-i}$).

> Wenn Spieler i den Zuschlag nicht erhält, dann ist $u_i(a) = 0$. Spieler i erhält in a den Zuschlag, wenn $a_i = \max a$ gilt und i die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Bei gleichen Geboten wird also der Spieler mit dem niedrigsten Index bevorzugt.

Eine schwach dominante Strategie für Spieler i besteht darin, v_i zu bieten. Für den Beweis der schwachen Dominanz ist zu zeigen, dass v_i eine beste Antwort auf alle Aktionsprofile a_{-i} der anderen Spieler ist und es zu jedem anderen Gebot a_i mindestens ein Profil a_{-i} gibt, auf das v_i eine echt bessere Antwort ist als a_i.

Für die zweite Eigenschaft sehen wir, dass v_i echt besser ist als $a_i \neq v_i$, wenn alle anderen Spieler $\frac{1}{2}(v_i + a_i)$ bieten.

Für die erste Eigenschaft unterscheiden wir zwei Fälle: Erhält Spieler i in $a = (a_{-i}, v_i)$ den Zuschlag, ergibt sich $v_i \geq \max a_{-i}$ und somit $u_i(a) = v_i - \max a_{-i} \geq 0$, also ein nicht-negativer Nutzen. Eine bessere Strategie gibt es nicht: Ohne den Zuschlag hätte i den Nutzen 0, und andere Strategien, die zum Zuschlag führen, bieten denselben Nutzen.

Erhält Spieler i in $a = (a_{-i}, v_i)$ nicht den Zuschlag, so ergibt sich ein Nutzen von 0. Wiederum geht es nicht besser: Andere Strategien, die nicht zum Zuschlag führen, haben den Nutzen 0, und Strategien, die zum Zuschlag führen, haben einen Nutzen von höchstens 0, da $\max a_{-i} \geq v_i$ ist (sonst hätte Spieler i bereits mit dem Gebot v_i den Zuschlag erhalten). Somit ist v_i in jedem Fall eine beste Antwort.

Ein Profil schwach dominanter Strategien a^* bildet stets ein Nash-Gleichgewicht: Da eine schwach dominante Strategie eine beste Antwort auf *alle* Strategieprofile ist, ist a_i^* insbesondere für jeden Spieler i eine beste Antwort auf a_{-i}^*.

2.2.1 Iterative Eliminierung und Nash-Gleichgewichte

Lemma 1. *Seien $G = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ und $G' = \langle N, (A_i')_{i \in N}, (u_i')_{i \in N} \rangle$ strategische Spiele, so dass G' aus G durch Elimination* einer *strikt dominierten Strategie entsteht. Dann gilt: a^* ist ein Nash-Gleichgewicht von G genau dann, wenn a^* ein Nash-Gleichgewicht von G' ist.*

Beweis. Sei a_i die Strategie für Spieler i, die beim Übergang von G zu G' eliminiert wird. Es gibt also eine Strategie $a_i^+ \in A_i$, so dass $u_i(a_{-i}, a_i) < u_i(a_{-i}, a_i^+)$ für alle $a_{-i} \in A_{-i}$.

Sei zuerst a^* ein Nash-Gleichgewicht von G. Dann ist a_i^* eine beste Antwort auf a_{-i}^*, es gilt also $u_i(a^*) = u_i(a_{-i}^*, a_i^*) \geq u_i(a_{-i}^*, a_i')$ für alle $a_i' \in A_i$, also insbesondere $u_i(a_{-i}^*, a_i^*) \geq u_i(a_{-i}^*, a_i^+)$. Da aufgrund der strikten Dominanz $u_i(a_{-i}^*, a_i) < u_i(a_{-i}^*, a_i^+)$ gilt, muss $a_i^* \neq a_i$ sein.

Die Gleichgewichtsstrategien a_j^* werden beim Übergang zu G' also nicht eliminiert. Für alle Spieler $j \in N$ ist a_j^* in G eine beste Antwort auf a_{-j}^*. Wegen $A_j' \subseteq A_j$ gilt dies dann natürlich auch in G'. Somit ist a^* auch ein Nash-Gleichgewicht von G'.

Sei umgekehrt a'^* ein Nash-Gleichgewicht von G'. Zu zeigen ist, dass a'^* auch ein Nash-Gleichgewicht von G ist. Da für alle Spieler j die Beziehung $A_j \supseteq A_j'$ gilt, ist dazu nur zu zeigen, dass $a_i'^*$ auch in G eine beste Antwort auf $a_{-i}'^*$ ist. Für Spieler $j \neq i$ muss $a_j'^*$ eine beste Antwort auf $a_{-j}'^*$ sein, da $A_j = A_j'$ gilt und somit die Bedingungen für G und G' identisch sind.

Da $A_i = A'_i \cup \{a_i\}$ ist und a'^*_i unter den Strategien in A'_i eine beste Antwort auf a'^*_{-i} ist, müssen wir nur zeigen, dass a_i keine bessere Antwort ist. Dies folgt daraus, dass einerseits $u_i(a'^*) = u_i(a'^*_{-i}, a'^*_i) \geq u_i(a^*_{-i}, a^+_i)$ (da a'^* ein Nash-Gleichgewicht in G' ist und $a^+_i \in A'_i$ ist) und andererseits $u_i(a'^*_{-i}, a_i) < u_i(a'^*_{-i}, a^+_i)$ (da a_i von a^+_i dominiert wird) gilt. Also ist a'^* auch ein Nash-Gleichgewicht von G. □

Satz 2. *Wenn ein strategisches Spiel sich durch die Methode der iterativen Eliminierung eindeutig lösen lässt, so ist das resultierende Strategieprofil ein Nash-Gleichgewicht, und zwar das einzige Nash-Gleichgewicht in diesem Spiel.*

Beweis. Mehrfache Anwendung von Lemma 1 (Induktion) ergibt, dass zwei Spiele G und G' dieselben Nash-Gleichgewichte besitzen, wenn G' aus G durch iterative Eliminierung entsteht.

Liefert nun das Verfahren der iterativen Eliminierung, ausgehend von G, das Spiel G' als eindeutige Lösung, so hat in G' jeder Spieler nur eine Strategie. Das einzig mögliche Strategieprofil in G' ist automatisch ein Nash-Gleichgewicht in G', und zwar das einzige. Da G und G' dieselben Nash-Gleichgewichte besitzen, folgt die Behauptung. □

2.2.2 Existenz und Eindeutigkeit von Nash-Gleichgewichten

1. Existiert immer ein Nash-Gleichgewicht? Nein. Es existiert jedoch bei endlichen Spielen immer ein Nash-Gleichgewicht, wenn wir Strategien randomisieren.
2. Sind die Nash-Gleichgewichte eindeutig? Nein.
3. Sind Nash-Gleichgewichte einfach zu berechnen? Im Matrixfall ja, vermutlich nein für randomisierte Spiele.

2.3 Strikt kompetitive Spiele und Maximin-Strategien

Definition 24 (Strikt kompetitive oder Nullsummen-Spiele). Ein **Strikt kompetitives Spiel** oder **Nullsummen-Spiel** ist ein strategisches Spiel $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ mit

$$u_1(a) = -u_2(a) \qquad \text{für alle } a \in A.$$

Beispiel 25. Matching Pennies:

	Kopf	Zahl
Kopf	$1, -1$	$-1, \ \ 1$
Zahl	$-1, \ \ 1$	$1, -1$

Beispiel 26. Ein Spiel mit je drei Aktionen pro Spieler:

	L	M	R
T	$8, -8$	$3, -3$	$-6, \quad 6$
M	$2, -2$	$-1, \quad 1$	$3, -3$
B	$-6, \quad 6$	$4, -4$	$8, -8$

Es existiert kein Nash-Gleichgewicht, denn alles, was dem einen Spieler nutzt, schadet dem anderen und umgekehrt. Versuche also, den eigenen Schaden zu minimieren.

Bestimme etwa für Spieler 1 Zeilenminimum des Nutzens, d.h. den Nutzen, den Spieler 1 sicher hat, wenn er die der Zeile entsprechende Aktion wählt, hier also $(-6; -1; -6)^t$. Also entscheidet sich der Rationale/Paranoide für M, wenn er über die Minima maximiert. Für Spieler 2 erhält man $(-8; -4; -8)$. Dieses Vorgehen ist für Paranoiker/Pessimisten in Ordnung, aber wenn man anfängt zu überlegen, dass der andere Spieler genau so denkt, ..., also kein Nash-Gleichgewicht. Aber angenommen es gibt ein Nash-Gleichgewicht, dann wird dieses mit Maximinimierer erreicht, wie wir gleich sehen werden.

Definition 27 (Maximinimierer). Sei $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein Nullsummenspiel. Eine Aktion $x^* \in A_1$ heißt **Maximinimierer (MM)** für Spieler 1 in G, falls

$$\min_{y \in A_2} u_1(x^*, y) \geq \min_{y \in A_2} u_1(x, y) \qquad \text{für alle } x \in A_1$$

und $y^* \in A_2$ heißt Maximinimierer für Spieler 2 in G falls

$$\min_{x \in A_1} u_2(x, y^*) \geq \min_{x \in A_1} u_2(x, y) \qquad \text{für alle } y \in A_2.$$

Bei unendlichen Spielen ersetze in der Definition Maximum durch Supremum und Minimum durch Infimum.

Bemerkung 28. Wenn ein Nash-Gleichgewicht in einem Nullsummenspiel existiert, so ist dies eine Kombination von Maximinimierern. (vgl. Satz 4 und Beweis dazu.)

Lemma 3. *Sei $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein Nullsummenspiel. Dann gilt*

$$\max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x, y) = - \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y)$$

Beweis. Es gilt für beliebiges reellwertiges f

$$\min_z(-f(z)) \quad = \quad -\max_z(f(z)). \tag{2.1}$$

Damit gilt für alle $y \in A_2$

$$\begin{aligned} -\min_{x \in A_1} u_2(x, y) \quad &\stackrel{2.1}{=} \quad \max_{x \in A_1}(-u_2(x, y)) \\ &= \quad \max_{x \in A_1}(u_1(x, y)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Schließlich erhält man

$$\begin{aligned}\max_{y\in A_2}\min_{x\in A_1} u_2(x,y) &\overset{2.1}{=} -\min_{y\in A_2} -[\min_{x\in A_1} u_2(x,y)]\\ &\overset{2.2}{=} -\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x,y).\end{aligned}$$

□

Satz 4. *Sei $G = \langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ ein Nullsummenspiel. Dann:*

1. *Falls (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht von G ist, dann sind x^* und y^* Maximinimierer für Spieler 1 bzw. Spieler 2.*
2. *Falls, (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht ist, dann gilt:*

$$\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y) = u_1(x^*,y^*)$$

3. *Falls $\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y)$ und x^* und y^* Maximinimierer von Spieler 1 bzw. Spieler 2 sind, dann ist (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht.*

Beweis. 1. Sei (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht. Nach der Definition von Nash-Gleichgewichten ist $u_2(x^*,y^*) \geq u_2(x^*,y)$ für alle $y \in A_2$. Wegen $u_1 = -u_2$ folgt $u_1(x^*,y^*) \leq u_1(x^*,y)$ für alle $y \in A_2$. Also

$$\begin{aligned}u_1(x^*,y^*) &= \min_{y\in A_2} u_1(x^*,y)\\ &\leq \max_{x\in A_1}\min_{y\in A_2} u_1(x,y) \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Außerdem gilt nach der Definition eines Nash-Gleichgewichtes aus der Perspektive von Spieler 1, dass $u_1(x^*,y^*) \geq u_1(x,y^*)$ für alle $x \in A_1$, also $u_1(x^*,y^*) \geq \min_{y\in A_2} u_1(x,y)$ für alle $x \in A_1$. Damit gilt auch $u_1(x^*,y^*) \geq \max_{x\in A_1}\min_{y\in A_2} u_1(x,y)$. Zusammen mit Ungleichung 2.3 folgt daraus

$$u_1(x^*,y^*) = \max_{x\in A_1}\min_{y\in A_2} u_1(x,y) \qquad (2.4)$$

Also ist x^* ein Maximinimierer.

Analog erhält man für Spieler 2, dass y^* ein Maximinimierer ist:

$$u_2(x^*,y^*) = \max_{y\in A_2}\min_{x\in A_1} u_2(x,y) \qquad (2.5)$$

2. Aus Gleichung 2.5 folgt mit Lemma 3, dass $u_2(x^*,y^*) = -\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x,y)$ und daraus wegen $u_1 = -u_2$, dass $u_1(x^*,y^*) = \min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x,y)$. Zusammen mit Gleichung 2.4 erhält man

$$u_1(x^*,y^*) = \min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x,y) = \max_{x\in A_1}\min_{y\in A_2} u_1(x,y).$$

Insbesondere folgt daraus, dass alle Nash-Gleichgewichte für alle Spieler denselben Nutzen haben.

3. Seien x^* und y^* Maximinimierer von Spieler 1 bzw. Spieler 2 und gelte $\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y) =: v^*$. Wegen Lemma 3 ist $-v^* = \max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x,y)$. Damit und da x^* und y^* Maximinimierer sind, gilt

$$u_1(x^*, y) \geq v^* \text{ für alle } y \in A_2 \text{ bzw.} \tag{2.6}$$
$$u_2(x, y^*) \geq -v^* \text{ für alle } x \in A_1 \tag{2.7}$$

   Insbesondere gilt für $x = x^*$ und $y = y^*$: $u_1(x^*, y^*) \geq v^*$ und $u_2(x^*, y^*) \geq -v^*$. Aus der letzten Ungleichung erhält man wegen $u_1 = -u_2$, dass $u_1(x^*, y^*) \leq v^*$, insgesamt also $u_1(x^*, y^*) = v^*$.

   Wegen Ungleichung 2.6 gilt $u_1(x^*, y) \geq u_1(x^*, y^*)$ für alle $y \in A_2$ bzw. wegen $u_1 = -u_2$ äquivalent $u_2(x^*, y) \leq u_2(x^*, y^*)$ für alle $y \in A_2$, d.h. y^* ist eine beste Antwort auf x^*.

   Analog erhält man wegen Ungleichung 2.7 $u_1(x, y^*) \leq u_1(x^*, y^*)$ für alle $x \in A_1$, d.h. auch x^* ist eine beste Antwort auf y^*. Damit ist (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht.

Insgesamt folgt, dass man, wenn es mehrere Nash-Gleichgewichte gibt, sich immer ein beliebiges aussuchen kann, da alle den gleichen Nutzen liefern. □

Beachte, dass strikt kompetitive Spiele im Wesentlichen für Brettspiele interessant sind, jedoch nicht für die Wirtschaft.

3 Gemischte und korrelierte Strategien

3.1 Überblick

Im letzten Kapitel hat sich gezeigt, dass nicht in jedem Spiel ein Nash-Gleichgewicht existieren muss (vgl. etwa Matching-Pennies-Spiel). Was kann man in solchen Situationen tun? Idee: randomisierte Strategien.

Definition 29 (Gemischte Strategie). Sei $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ ein strategisches Spiel.

Sei $\Delta(A_i)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen über der Menge A_i. Ein $\alpha_i \in \Delta(A_i)$ ist eine **gemischte Strategie** in G, $\alpha_i(a_i)$ die Wahrscheinlichkeit für die Wahl von $a_i \in A_i$.

Ein Profil $(\alpha_i)_{i \in N} \in \times_{i \in N} \Delta(A_i)$ induziert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $A = \times_{i \in N} A_i$ durch

$$p(a) := \prod_{i \in N} \alpha_i(a_i).$$

Für $A' \subseteq A$ sei

$$p(A') := \sum_{a \in A'} p(a) = \sum_{a \in A'} \prod_{i \in N} \alpha_i(a_i).$$

Beispiel 30. Gemischte Strategie im Matching-Pennies-Spiel:

	Kopf	Zahl
Kopf	$1, -1$	$-1, \ \ 1$
Zahl	$-1, \ \ 1$	$1, -1$

Für Spieler 1 betrachte die gemischte Strategie $\alpha_1 \in \Delta(\{K, Z\})$ mit

$$\alpha_1(K) = \frac{2}{3} \text{ und } \alpha_1(Z) = \frac{1}{3}.$$

Für Spieler 2 betrachte die gemischte Strategie $\alpha_2 \in \Delta(\{K, Z\})$ mit

$$\alpha_2(K) = \frac{1}{3} \text{ und } \alpha_2(Z) = \frac{2}{3}.$$

Die induzierte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\{ K, Z \}^2$ ist

$$\begin{aligned}
p(K, K) &= \alpha_1(K) \cdot \alpha_2(K) = \frac{2}{9} & u_1(K, K) &= +1 \\
p(K, Z) &= \alpha_1(K) \cdot \alpha_2(Z) = \frac{4}{9} & u_1(K, Z) &= -1 \\
p(Z, K) &= \alpha_1(Z) \cdot \alpha_2(K) = \frac{1}{9} & u_1(Z, K) &= -1 \\
p(Z, Z) &= \alpha_1(Z) \cdot \alpha_2(Z) = \frac{2}{9} & u_1(Z, Z) &= +1.
\end{aligned}$$

Definition 31 (Erwarteter Nutzen). Sei $\alpha \in \times_{i \in N} \Delta(A_i)$. Der **erwartete Nutzen** von α für Spieler i ist definiert als

$$U_i(\alpha) = U_i((\alpha_j)_{j \in N}) := \sum_{a \in A} \underbrace{\left(\prod_{j \in N} \alpha_j(a_j) \right)}_{=p(a)} u_i(a).$$

Beispiel 32. In Beispiel 30 sind der erwartete Nutzen für Spieler 1 und Spieler 2

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{9} \text{ und } U_2(\alpha_1, \alpha_2) = +\frac{1}{9}.$$

Definition 33 (Unterstützungsmenge). Sei α_i eine gemischte Strategie. Die **Unterstützungsmenge** (**support**) von α_i ist die Menge

$$supp(\alpha_i) = \{ a_i \in A_i \mid \alpha_i(a_i) > 0 \}.$$

Definition 34 (Gemischte Erweiterung). Die **gemischte Erweiterung** eines strategischen Spiels $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ ist das Spiel $\langle N, (\Delta(A_i)), (U_i) \rangle$, in dem $\Delta(A_i)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen über den Aktionen A_i ist und $U_i : \times_{j \in N} \Delta(A_j) \to \mathbb{R}$ jedem $\alpha \in \times \Delta_{j \in N}(A_j)$ den erwarteten Nutzen für Spieler i unter der von α induzierten Wahrscheinlichkeitsverteilung zuordnet.

Definition 35 (Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien). Sei G ein strategisches Spiel. Ein **Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien** von G ist ein Nash-Gleichgewicht der gemischten Erweiterung von G.

Satz 5 (Satz von Nash). *Jedes endliche strategische Spiel hat ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.*

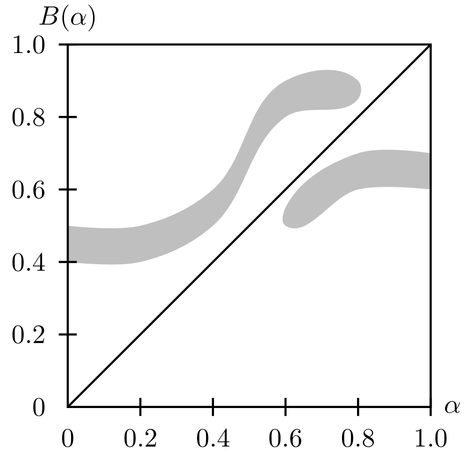
Beweisskizze. Betrachte die mengenwertige Funktion (Korrespondenz) der besten Antworten $B : \mathbb{R}^{\sum_i |A_i|} \to \mathrm{Pot}(\mathbb{R}^{\sum_i |A_i|})$ mit

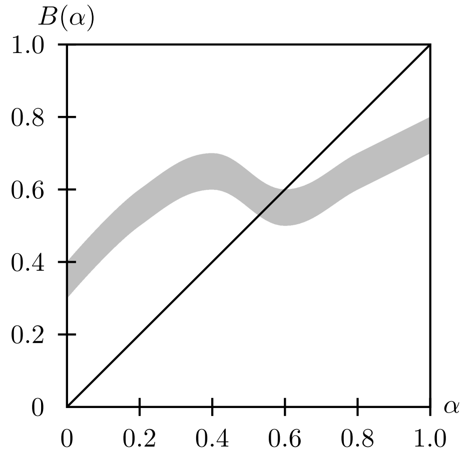
$$B(\alpha) = \bigtimes_{i \in N} B_i(\alpha_{-i}).$$

Ein gemischtes Strategieprofil α ist Fixpunkt der Korrespondenz B gdw. $\alpha \in B(\alpha)$ gdw. α ein Nash-Gleichgewicht ist.

Der Graph der Korrespondenz sollte zusammenhängend sein. Dann liegen Punkte auf der Fixpunktdiagonalen. $\square$

In der ersten der beiden folgenden Abbildungen ist der Graph der Korrespondenz nicht zusammenhängend und es liegen keine Punkte auf der Fixpunktdiagonalen. Der zweite Graph ist dagegen zusammenhängend und die Korrespondenz besitzt Fixpunkte.





Definition 36. Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt**, wenn sie

1. beschränkt ist, d.h. es in jeder Dimension obere und untere Schranken gibt und
2. abgeschlossen ist, d.h. wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge von Elementen aus X selbst in X liegt.

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn für alle $x, y \in X$ und beliebiges $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in X.$$

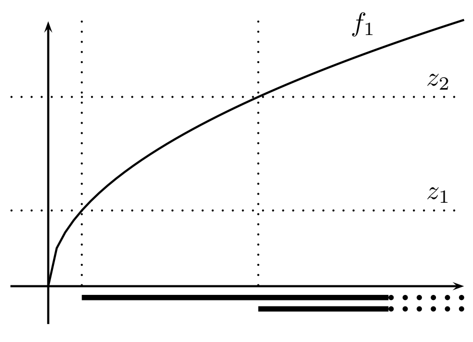
Eine Korrespondenz $f : X \to \mathrm{Pot}(X)$ heißt **ober-hemi-stetig**, falls ihr Graph

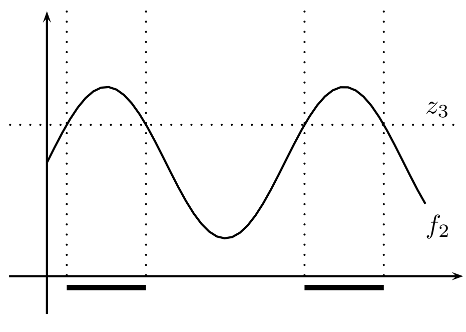
$$\mathrm{Graph}(f) = \{ (x, y) \mid x \in X,\ y \in f(x) \}$$

eine abgeschlossene Menge ist.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **quasi-konkav**, falls für alle $z \in \mathbb{R}$ die Menge $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq z \}$ konvex ist.

Die erste der beiden unten abgebildeten Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist quasikonkav, die zweite nicht.





Satz 6 (Fixpunktsatz von Kakutani). *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere, kompakte und konvexe Menge und sei außerdem $f : X \to \mathrm{Pot}(X)$ eine ober-hemi-stetige Korrespondenz, so dass für jedes $x \in X$ die Menge $f(x) \subseteq X$ nicht-leer und konvex ist. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in X$ mit $x \in f(x)$.*

Beweis. vgl. z. B. [Heu04, Abschnitt 232]. □

Beweis des Satzes von Nash. Zeige, dass der Fixpunktsatz von Kakutani mit $\times_i \Delta(A_i)$ für X und B für f anwendbar ist.

1. $\times_i \Delta(A_i)$ ist nicht-leer, konvex und kompakt: Ein Profil von gemischten Strategien zu G ist durch $M := \sum_{i \in N} |A_i|$ nicht-negative reelle Zahlen gegeben, so dass sich die Zahlen, die den Aktionen eines Spielers entsprechen, zu 1 addieren.

   Wir interpretieren die Menge der gemischten Strategieprofile für G, symbolisch $\mathcal{A} := \times_{i \in N} \Delta(A_i)$, als Teilmenge des $\mathbb{R}^M$. Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ nicht-leer, kompakt und konvex ist.

   Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Spieler mit natürlichen Zahlen bezeichnet, d. h. $N = \{1, \ldots, n\}$.

   $\mathcal{A}$ ist nicht-leer, da $\mathcal{A}$ z. B. das Tupel $(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{|A_1|-1 \text{ mal}}, \ldots, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{|A_n|-1 \text{ mal}})$ enthält.

   $\mathcal{A}$ ist beschränkt, da keines der Elemente negativ oder größer als 1 sein kann. $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen, denn wenn in einer konvergenten Folge von Elementen von $\mathcal{A}$ alle Elemente der Folge nicht-negativ und durch 1 beschränkt sind und sich die zu einem Spieler gehörenden Wahrscheinlichkeiten zu 1 addieren, dann muss dies auch für den Grenzwert gelten. Ansonsten enthält man unmittelbar einen Widerspruch dazu, dass Grenzwerte Häufungspunkte sein müssen. Da $\mathcal{A}$ beschränkt und abgeschlossen ist, ist $\mathcal{A}$ kompakt.

   Seien schließlich $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ und $t \in [0, 1]$. Betrachte $\gamma = t\alpha + (1-t)\beta$. Es gilt: $\min \gamma = \min(t\alpha + (1-t)\beta) \geq t \min \alpha + (1-t) \min \beta \geq t \cdot 0 + (1-t) \cdot 0 = 0$, und analog $\max \gamma \leq 1$.

   Seien $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ und $\tilde{\gamma}$ die Abschnitte von α, β und γ, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Spieler i bestimmen. Dann gilt $\sum \tilde{\gamma} = \sum (t\tilde{\alpha} + (1-t)\tilde{\beta}) = t \sum \tilde{\alpha} + (1-t) \sum \tilde{\beta} = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$. Also summieren sich die zusammengehörigen Wahrscheinlichkeiten in γ zu 1. Zusammen folgt $\gamma \in \mathcal{A}$, also ist $\mathcal{A}$ auch konvex.

2. $B(\alpha)$ ist nicht-leer: U_i ist für festes α_{-i} linear in der gemischten Strategie von Spieler i, d.h. für $\beta_i, \gamma_i \in \Delta(A_i)$ gilt

   $$U_i(\alpha_{-i}, \lambda\beta_i + (1-\lambda)\gamma_i) = \lambda U_i(\alpha_{-i}, \beta_i) + (1-\lambda) U_i(\alpha_{-i}, \gamma_i) \qquad \text{für } \lambda \in [0, 1] \quad (3.1)$$

   Eine mögliche Interpretation der Linearität ist es, dass man eine Metamischung spielt, d.h. mit Wahrscheinlichkeit λ spielt man β_i und mit Wahrscheinlichkeit $(1-\lambda)$ spielt man γ_i.

   Daraus folgt, dass U_i stetig auf $\Delta(A_i)$ ist. Stetige Funktionen auf kompakten Mengen haben ihr Maximum in der Menge. Also ist jedes $B_i(\alpha_{-i})$ und damit auch $B(\alpha)$ eine nicht-leere Menge.

3. $B(\alpha)$ ist konvex, da $B_i(\alpha_i)$ konvex ist: seien $\alpha_i', \alpha_i'' \in B_i(\alpha_{-i})$, d.h.

$$U_i(\alpha_{-i}, \alpha_i') = U_i(\alpha_{-i}, \alpha_i'').$$

Wegen Gleichung 3.1 gilt dann auch

$$\lambda\alpha_i' + (1-\lambda)\alpha_i'' \in B_i(\alpha_{-i}).$$

4. Es ist noch zu zeigen, dass B ober-hemi-stetig ist. Sei (α^n, β^n) eine Folge in Graph(B) mit $\lim_{n\to\infty}(\alpha^n, \beta^n) = (\alpha, \beta)$; $\alpha^n, \beta^n, \alpha, \beta \in \times_i \Delta(A_i)$ und $\beta^n \in B(\alpha^n)$. Zeige, dass dann $(\alpha, \beta) \in$ Graph(B):

Es gilt für alle $i \in N$:

$$\begin{aligned}
U_i(\alpha_{-i}, \beta_i) &\overset{\text{Def. } \alpha,\ \beta}{=} U_i(\lim_{n\to\infty}(\alpha_{-i}^n, \beta_i^n)) \\
&\overset{\text{Stetigkeit}}{=} \lim_{n\to\infty} U_i(\alpha_{-i}^n, \beta_i^n) \\
&\overset{\beta_i^n \text{ beste Antwort auf } \alpha_{-i}^n}{\geq} \lim_{n\to\infty} U_i(\alpha_{-i}^n, \beta_i') \qquad \text{für alle } \beta_i' \in \Delta(A_i) \\
&\overset{\text{Stetigkeit}}{=} U_i(\lim_{n\to\infty} \alpha_{-i}^n, \beta_i') \qquad \text{für alle } \beta_i' \in \Delta(A_i) \\
&\overset{\text{Def. } \alpha_i}{=} U_i(\alpha_{-i}, \beta_i') \qquad \text{für alle } \beta_i' \in \Delta(A_i)
\end{aligned}$$

Also ist β_i eine beste Antwort auf α_{-i} für alle $i \in N$, damit $\beta \in B(\alpha)$ und schließlich $(\alpha, \beta) \in$ Graph(B).

□

Satz 7 (Verallgemeinerung des Satzes von Nash). *Sei $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ein strategisches Spiel, so dass für jedes $i \in N$*

1. *A_i eine nicht-leere, konvexe und kompakte Menge und*
2. *u_i stetig in A und quasi-konkav in A_i ist.*

Dann besitzt G ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien.

Beweisidee. Ähnlich wie Beweis des Satzes von Nash. Beachte, dass die Quasi-Konkavität von u_i die Konvexität der Mengen der besten Antworten impliziert. □

Lemma 8. *Sei $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ein endliches strategisches Spiel. Dann ist $\alpha^* \in \times_{i\in N} \Delta(A_i)$ ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien gdw. für jeden Spieler $i \in N$ jede reine Strategie aus der Unterstützungsmenge von α_i^* eine beste Antwort auf α_{-i}^* ist.*

Für den einzelnen Spieler ist es also – wenn die anderen Spieler ihre gemischten Strategien beibehalten – egal, ob er seine gemischte Strategie oder eine Einzelaktion daraus spielt.

Beweis. Sei zunächst α^* ein Nash-Gleichgewicht mit $a_i \in supp(\alpha_i^*)$. Angenommen, a_i ist keine beste Antwort auf α_{-i}^*. Wegen der Linearität von U_i kann Spieler i seine Auszahlung verbessern, indem er Gewicht von a_i auf andere Aktionen in $supp(\alpha_i^*)$ verteilt. Also war α_i^* keine beste Antwort und somit im Widerspruch zur Voraussetzung α^* kein Nash-Gleichgewicht.

Für die andere Richtung der Äquivalenz nehmen wir an, dass α^* kein Nash-Gleichgewicht ist. Dann muss es ein $i \in N$ und eine Strategie α'_i mit der Eigenschaft geben, dass $U_i(\alpha^*_{-i}, \alpha'_i) > U_i(\alpha^*_{-i}, \alpha^*_i)$. Wegen der Linearität von U_i muss es eine Aktion $a'_i \in supp(\alpha'_i)$ geben, die höheren Nutzen als eine Aktion $a''_i \in supp(\alpha^*_i)$ bringt; $supp(\alpha^*_i)$ besteht also nicht nur aus besten Antworten auf α^*_{-i}. □

Bemerkung 37. Ist $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ mit $A_1 = \{T, B\}$ und $A_2 = \{L, R\}$ ein Zwei-Spieler-Spiel mit je zwei möglichen Aktionen und ist (α^*_1, α^*_2) mit $\alpha^*_1(T) = 1$ und $0 < \alpha^*_2(L) < 1$ ein Nash-Gleichgewicht in G, so ist auch mindestens eines der Profile (T, L) und (T, R) ein Nash-Gleichgewicht in G.

Nach Voraussetzung sind sowohl L als auch R beste Antworten auf T. Angenommen, T wäre weder auf L noch auf R eine beste Antwort. Dann wäre B sowohl auf L als auch auf R eine bessere Antwort als T. Wegen der Linearität des erwarteten Nutzens wäre B auch eine bessere Antwort als T auf α^*_2, im Widerspruch zu der Annahme, dass (α^*_1, α^*_2) ein Nash-Gleichgewicht in G ist.

Betrachte zum Beispiel das Nash-Gleichgewicht $(\{T \mapsto 1, B \mapsto 0\}, \{L \mapsto \frac{1}{10}, R \mapsto \frac{9}{10}\})$ in dem Spiel

	L	R
T	1, 1	1, 1
B	2, 2	$-5, -5$

Hier ist auch (T, R) ein (reines) Nash-Gleichgewicht.

Beispiel 38. Gemischte Nash-Gleichgewichte bei Bach oder Strawinsky:

		Strawinsky-Fan	
		B	S
Bach-Fan	B	2, 1	0, 0
	S	0, 0	1, 2

Allgemein: vier mögliche Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien.

Die möglichen echt gemischten Strategieprofile sind

$$\begin{array}{ccc} \{B\} \text{ vs. } \{B, S\}, & \{S\} \text{ vs. } \{B, S\}, & \{B, S\} \text{ vs. } \{B\}, \\ \{B, S\} \text{ vs. } \{S\} & \text{und} & \{B, S\} \text{ vs. } \{B, S\} \end{array}$$

Bei „Bach oder Strawinsky“ gibt es zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien, nämlich (B, B) und (S, S). Wie sieht aber ein echt gemischtes Nash-Gleichgewicht für „Bach oder Strawinsky“ aus? Betrachte hier nur Nash-Gleichgewichte mit $\{B, S\}$ vs. $\{B, S\}$.

Angenommen, (α_1, α_2) ist das gemischte Nash-Gleichgewicht mit $0 < \alpha_1(B) < 1$ und $0 < \alpha_2(B) < 1$. Dann muss wegen Lemma 8 gelten, dass

$$U_1((1,0),(\alpha_2(B),\alpha_2(S))) = U_1((0,1),(\alpha_2(B),\alpha_2(S))).$$

Die linke Seite dieser Gleichung entspricht dem Fall, dass Spieler 1 das Bach-Konzert besucht und hat den Wert $2\cdot\alpha_2(B)+0\cdot\alpha_2(S)$. Die rechte Seite entspricht der Aktion, das Strawinsky-Konzert zu besuchen und hat den Wert $0\cdot\alpha_2(B)+1\cdot\alpha_2(S) = 1\cdot(1-\alpha_2(B))$. Gleichsetzen der Werte ergibt $2\cdot\alpha_2(B) = 1-\alpha_2(B)$. Daraus folgt, dass $\alpha_2(B) = \frac{1}{3}$ und $\alpha_2(S) = \frac{2}{3}$.

Analog erhält man für Spieler 1, dass $\alpha_1(B) = \frac{2}{3}$ und $\alpha_1(S) = \frac{1}{3}$. Das Nutzenprofil dieses Gleichgewichts ist $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Da der erwartete Nutzen *beider* Spieler geringer ist als etwa in den reinen Strategieprofilen (B,B) oder (S,S), wenn sich die Spieler absprechen würden, betrachtet man sogenannte korrelierte Gleichgewichte:

3.2 Korrelierte Gleichgewichte

Idee: Man benutzt einen öffentlich sichtbaren Würfel, um bei gemischten Strategien zu entscheiden, welche Aktion gespielt wird. Damit kann man eine höhere Auszahlung erhalten.

Beispiel 39. Ein korreliertes Gleichgewicht bei Bach oder Strawinsky: Bei Bach oder Strawinsky gibt es die reinen Nash-Gleichgewichte (B,B) und (S,S) mit Auszahlung $(2,1)$ bzw. $(1,2)$ und in gemischten Strategien zusätzlich das Gleichgewicht

$$((B \mapsto \frac{1}{3}, S \mapsto \frac{2}{3}),(B \mapsto \frac{2}{3}, S \mapsto \frac{1}{3}))$$

mit Auszahlung $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Bei einer gemeinsamen fairen Münze kann das Auszahlungsprofil $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ erreicht werden, wenn beide Spieler bei „Kopf“ die Strategie Bach und bei „Zahl“ die Strategie Strawinsky spielen.

Weitere Idee: Nicht alle Zufallsergebnisse sind sofort sichtbar. Nach Formalisierung dieser Idee kann man zeigen, dass es für alle Nash-Gleichgewichte auch äquivalente korrelierte Gleichgewichte gibt, und dass man unter Umständen mit korrelierten Gleichgewichten höhere Auszahlungen bekommen kann.

3.3 Evolutionäre Gleichgewichte

Idee: die Spieler sind biologische Organismen, die derselben Art angehören und denen verschiedene Strategien zur Verfügung stehen. Die Aktionsauswahl wird durch die „Natur“ (Vererbung, Mutation) getroffen. Der Nutzen entspricht den Überlebenschancen eines Individuums.

Es soll die Frage beantwortet werden, ob es Strategien gibt, die in dem Sinne „evolutionär stabil“ sind, dass sie ein stabiles Gleichgewicht in der Population herstellen, in dem Mutationen „unattraktiv“ sind.

Bei der spieltheoretischen Modellierung betrachten wir nur Zwei-Personenspiele, die für die „Begegnung“ zweier Individuen stehen, d.h. $N = \{1, 2\}$. Die Tatsache, dass die Individuen derselben Art angehören, wird dadurch modelliert, dass $A_1 = A_2$ und $u_1(a, b) = u_2(b, a)$ (schreibe deshalb kurz $u := u_1$). Gemischte Strategien entsprechen gemischten Populationen.

Eine Strategie $b^* \in B$ ist evolutionär stabil, wenn sie gegen Mutationen resistent ist. Wenn ein kleiner Anteil $\varepsilon > 0$ an Individuen mutiert, d.h. $b \in B \setminus \{b^*\}$ wählt, soll sich trotzdem b^* durchsetzen:

$$\overbrace{\underbrace{(1-\varepsilon)u(b,b^*)}_{\text{M vs. R}} + \underbrace{\varepsilon u(b,b)}_{\text{M vs. M}}}^{U_M \text{ Mutant}} < \overbrace{\underbrace{(1-\varepsilon)u(b^*,b^*)}_{\text{R vs. R}} + \underbrace{\varepsilon u(b^*,b)}_{\text{R vs. M}}}^{U_R \text{ Rein}}.$$

Für kleines ε ist das äquivalent zu

$$u(b, b^*) < u(b^*, b^*) \quad \text{oder} \quad [u(b, b^*) = u(b^*, b^*) \text{ und } u(b, b) < u(b^*, b)]$$

Definition 40 (Symmetrisches strategisches Spiel). Ein strategisches Spiel mit zwei Spielern $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ heißt **symmetrisch**, falls $A_1 = A_2$ und $u_1(a, b) = u_2(b, a)$ für alle $a, b \in A_1$ gilt. $B := A_1 (= A_2)$ heißt Aktionsmenge von G, $u := u_1$ heißt Nutzen- oder Auszahlungsfunktion von G.

Definition 41 (Evolutionär stabile Strategie). Sei G ein symmetrisches strategisches Spiel mit Aktionsmenge B und Nutzenfunktion u. Eine Strategie $b^* \in B$ heißt **evolutionär stabil**, falls

- (b^*, b^*) ein Nash-Gleichgewicht von G ist und
- für alle besten Antworten $b \in B$ auf b^* mit $b \neq b^*$ gilt $u(b, b) < u(b^*, b)$.

Beispiel 42. Falke-oder-Taube-Spiel mit reellem Parameter $c > 0$ für Verlust bei einem Kampf.

	T	F
T	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$0, 1$
F	$1, 0$	$\frac{1}{2}(1-c), \frac{1}{2}(1-c)$

Hat dieses Spiel evolutionär stabile Strategien? Bestimme dazu in einem ersten Schritt alle symmetrischen Nash-Gleichgewichte (b^*, b^*) und untersuche diese in einem zweiten Schritt darauf, ob sie die „Mutanten-Eigenschaft“ erfüllen, d.h. ob für alle abweichenden besten Antworten b gilt, dass $u(b, b) < u(b^*, b)$.

Zur Bestimmung der symmetrischen Nash-Gleichgewichte:

1. reine gegen reine Strategie: (T, T) ist kein Nash-Gleichgewicht, (T, F) und (F, T) sind genau dann Nash-Gleichgewichte, wenn $c \geq 1$, hier aber uninteressant, weil sie nicht symmetrisch sind, und (F, F) ist ein Nash-Gleichgewicht genau dann, wenn $c \leq 1$. F ist also unser erster Kandidat für eine evolutionär stabile Strategie.

2. reine gegen gemischte Strategie: uninteressant, da ein solches Nash-Gleichgewicht nicht symmetrisch wäre.

3. gemischte gegen gemischte Strategie: sei $\alpha^* = (b^*, b^*)$ mit $b^* = \{ T \mapsto p, F \mapsto 1-p \}$, wobei $0 < p < 1$. Es muss gelten, dass $u(T, b^*) = u(F, b^*)$, d.h. $p \cdot \frac{1}{2} + (1-p) \cdot 0 = p \cdot 1 + (1-p) \cdot \frac{1}{2}(1-c)$. Vereinfacht man diese Gleichung, so erhält man zunächst $\frac{1}{2}p = p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}pc$. Dies lässt sich zu $0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}pc$ vereinfachen. Löst man diese Gleichung nach p auf, erhält man $p = \frac{2}{c}(\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{c}$. Wegen $0 < p < 1$ muss $c > 1$ sein. Damit ist α^* für $c > 1$ ein Nash-Gleichgewicht und somit unser zweiter Kandidat für eine evolutionär stabile Strategie.

Untersuche nun die beiden oben ermittelten Kandidaten, ob sie die „Mutanten-Eigenschaft" erfüllen. Betrachte also alle anderen besten Antworten auf b^*.

1. Kandidat 1: $b^* = F$ für $c \leq 1$. Falls $c < 1$, ist F strikt dominant, d.h. es keine weiteren besten Antworten auf F. Damit ist F evolutionär stabil. Falls $c = 1$, ist auch jede gemischte Strategie $b = \{ T \mapsto q, F \mapsto 1-q \}$ mit $0 < q \leq 1$ eine (abweichende) beste Antwort auf b^*. Da aber $u(b,b) = \frac{1}{2}q^2 + 1 \cdot (1-q) \cdot q = \frac{1}{2}q^2 + q - q^2 = q - \frac{1}{2}q^2 < q = u(b^*, b)$, ist F für $c \leq 1$ evolutionär stabil.

2. Kandidat 2: $b^* = \{ T \mapsto p, F \mapsto 1-p \}$ für $c > 1$. Alle $b \in \Delta(\{ T, F \})$ mit $b = \{ T \mapsto q, F \mapsto 1-q \}$, $0 \leq q \leq 1$, sind beste Antworten auf b^*. Betrachte zunächst nur reine beste Antworten: mit $b = T$ ist $u(b^*, b) = (1-\frac{1}{c}) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{c} \cdot 1 > \frac{1}{2} = u(b,b)$, mit $b = F$ ist $u(b^*, b) = (1-\frac{1}{c}) \cdot 0 + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{2}(1-c) > \frac{1}{2}(1-c) = u(b,b)$. Die Bedingung $u(b,b) < u(b^*, b)$ ist wegen $|\{ T, F \}| = 2$ auch für alle anderen $b \in \Delta(\{ T, F \})$ erfüllt. Damit ist b^* für $c > 1$ evolutionär stabil.

Aus der Definition von evolutionär stabilen Strategien folgt, dass symmetrische Nash-Gleichgewichte (b^*, b^*), für die es keine andere beste Antwort gibt, evolutionär stabile Strategien sein müssen. Nicht-strikte NGs müssen nicht unbedingt evolutionär stabile Strategien sein.

Beispiel 43. Betrachte das Spiel

	1	2	3
1	$\gamma, \ \gamma$	$1, -1$	$-1, \ 1$
2	$-1, \ 1$	$\gamma, \ \gamma$	$1, -1$
3	$1, -1$	$-1, \ 1$	$\gamma, \ \gamma$

mit reellem Parameter $0 < \gamma < 1$. Das Profil (α, α) mit $\alpha = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ist ein gemischtes Nash-Gleichgewicht. Die Auszahlung für beide Spieler beträgt $\frac{\gamma}{3}$. α ist aber keine evolutionär stabile Strategie, denn ein Mutant könnte die reine Strategie $\alpha' = (1,0,0)$ – oder eine beliebige andere reine Strategie – spielen. Gegen α-Spieler erhielte er damit Auszahlung $\frac{\gamma}{3}$, gegen andere Mutanten, die auch α' spielen, aber Auszahlung $\gamma > \frac{\gamma}{3}$. Das heißt, α_i ist keine evolutionär stabile Strategie. Beachte, dass α' *kein* neues Nash-Gleichgewicht (α', α') induziert.

4 Algorithmen und Komplexität

In diesem Kapitel werden Algorithmen zur Bestimmung von Nash-Gleichgewichten vorgestellt und auf ihre Komplexität untersucht. Die zentralen Aussagen werden sein, dass in Nullsummenspielen das Finden eines Nash-Gleichgewichts in gemischten Strategien nur polynomielle Zeit benötigt, da man dieses Problem auf das Lösen eines Linearen Programmes zurückführen kann, dass für allgemeine Zwei-Personen-Matrixspiele das Finden eines gemischten Nash-Gleichgewichts ein Problem ist, dessen Komplexität noch unbekannt ist, und dass das Finden eines gemischten Nash-Gleichgewichts mit einem bestimmten Wert (im Sinne von Summe der Auszahlungen oder von Auszahlung für einen der Spieler) **NP**-vollständig ist.

4.1 Nullsummenspiele

Nach dem Satz von Nash existieren Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien. Nach dem Maximin-Satz ist jedes Nash-Gleichgewicht ein Paar von Maximinimierern. Da mindestens ein Nash-Gleichgewicht existiert und damit alle Paare von Miximinimierern Nash-Gleichgewichte sind und zu den gleichen Auszahlungen führen, genügt es, solche Paare zu berechnen.

Laufe dazu über alle gemischten Strategien α von Spieler 1 und bestimme jeweils eine für Spieler 1 schlechteste Antwort β_α von Spieler 2. Bestimme dann einen Maximinimierer α so, dass $U_1(\alpha, \beta_\alpha)$ maximal wird. Wegen des Support-Lemmas (Lemma 8) reicht es aus, anstelle aller möglichen Strategien β_α nur die reinen Antworten von Spieler 2 zu betrachten.

4.1.1 Exkurs Lineare Programmierung/Lineare Optimierung

Der Ausdruck „Lineare Programmierung“ wurde in den 1930er Jahren geprägt – bevor Computer programmiert wurden. Damals bedeutete „Programmierung“ noch Planung (vgl. auch Ausdruck „dynamische Programmierung“).

Worum es geht: Lösung eines Systems linearer Ungleichungen über n reellwertigen Variablen unter Berücksichtigung einer linearen Zielfunktion, die man maximieren (oder minimieren) möchte.

Beispiel 44 (Sortimentproblem). Es werden zwei Sortimente produziert, die beide ganz verkauft werden können.

Sortiment 1: 25 Minuten Schneiden, 60 Minuten Zusammenbauen, 68 Minuten Nachbearbeitung. 30 Euro Gewinn pro Artikel.

Sortiment 2: 75 Minuten Schneiden, 60 Minuten Zusammenbau, 34 Minuten Nachbearbeitung. 40 Euro Gewinn pro Artikel.

Pro Tag stehen zur Verfügung: 450 Minuten zum Zuschneiden, 480 Minuten zum Zusammenbau, 476 Minuten für die Nachbearbeitung.

Wie viele Artikel der beiden Sortimente stellt man her, wenn man den Gewinn maximieren will? Sei zur Beantwortung dieser Frage x die Anzahl der produzierten Artikel in Sortiment 1, y die Anzahl der produzierten Artikel in Sortiment 2.

Die oben genannten Einschränkungen und das Ziel der Gewinnmaximierung lassen sich wie folgt formalisieren:

$$x \geq 0, y \geq 0 \tag{4.1}$$

$$25x + 75y \leq 450 \text{ (oder äquiv. } y \leq \frac{450}{75} - \frac{25x}{75} = 6 - \frac{1}{3}x) \tag{4.2}$$

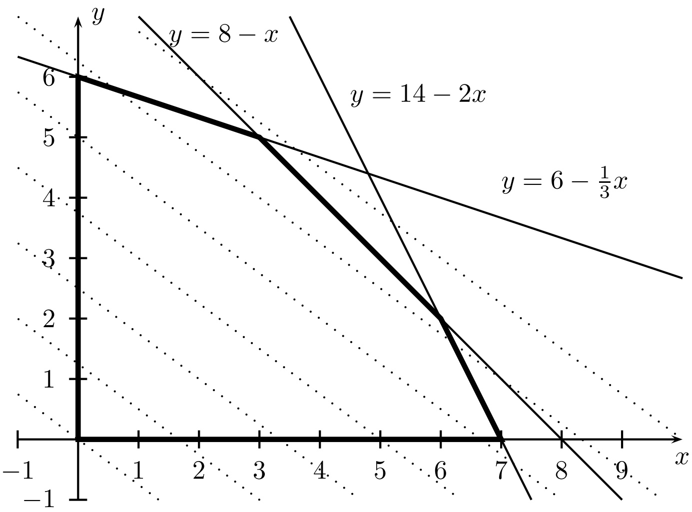
$$60x + 60y \leq 480 \text{ (oder äquiv. } y \leq 8 - x) \tag{4.3}$$

$$68x + 34y \leq 476 \text{ (oder äquiv. } y \leq 14 - 2x) \tag{4.4}$$

$$\text{Maximiere } z = 30x + 40y \tag{4.5}$$

Die Ungleichungen (4.1)-(4.4) beschreiben zulässige Lösungen. Zeile (4.5) ist die *Zielfunktion* (objective function). Die Ungleichungen (4.1)-(4.4) beschreiben eine *konvexe* Menge in $\mathbb{R}^2$.

In der folgenden Abbildung sind die zulässigen Lösungen genau die Punkte in der von den drei Geraden und den Koordinatenachsen eingeschlossenen konvexen Menge. Auf den gepunkteten Linien ist der Nutzen z konstant, von unten nach oben handelt es sich um die Isolinien für $z = 0, 50, 100, \ldots, 300$. Der Nutzen wird also in dem Schnittpunkt der Geraden $y = 6 - \frac{1}{3}x$ und $y = 8 - x$, d.h. in $(x, y) = (3, 5)$, maximiert, der maximale Nutzen beträgt 290.



Definition 45 (Lineares Programm in Standardform). Ein **Lineares Programm in Standardform** besteht aus n reellwertigen Variablen x_i, m Koeffizienten b_j, m Konstanten c_j, $m \cdot n$ Koeffizienten a_{ij}, m Gleichungen der Form

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$$

sowie der (zu minimierenden) **Zielfunktion**

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \text{ (für } x_i \geq 0).$$

Will man die Zielfunktion nicht minimieren, sondern maximieren, so genügt es, die Vorzeichen der Koeffizienten b_i umzukehren. Anstelle von Ungleichungen kann man auch Gleichungen wählen, da

$$x + y \leq c \text{ gdw. } x + y + z = c \text{ für ein } z \geq 0.$$

Ein solches z heißt **Slack-Variable**.

Die **Simplex-Methode** ist das Standardverfahren, um lineare Programme zu lösen, d.h. um zulässige Lösungen zu finden, die die Zielfunktion minimieren bzw. maximieren. Diese Methode hat im schlechtesten Fall exponentielle Laufzeit, ist aber in allen praktischen Fällen „gutmütig“. Daneben gibt es auch ein Polynomialzeit-Lösungsverfahren, das jedoch in der Praxis kaum zum Einsatz kommt.

4.1.2 Anwendung auf Nullsummenspiele

Seien $A_1 = \{ a_1, \ldots, a_m \}$ und $A_2 = \{ b_1, \ldots, b_n \}$.

Spieler 1 sucht eine gemischte Strategie α_1. Bestimme für jedes α_1 von Spieler 1 den Nutzen bei der schlimmsten Antwort des Gegners, dann maximiere darüber. Das entsprechende lineare Programm ist

$$\begin{aligned} \alpha_1(a_i) &\geq 0 \qquad \text{für alle } i \in \{ 1, \ldots, m \} \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_1(a_i) &= 1 \\ U_1(\alpha_1, b_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_1(a_i) \cdot u_1(a_i, b_j) &\geq u \qquad \text{für alle } j \in \{ 1, \ldots, n \} \\ \text{Maximiere } u. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Programms ist ein Maximinimierer für Spieler 1. Die Lösung eines analogen Programmes führt zu einem Maximinimierer für Spieler 2.

Da bei Nullsummenspielen, die ein Nash-Gleichgewicht besitzen, Maximinimierung und Minimaximierung das gleiche Ergebnis liefern, kann man auch das lineare Programm mit den Ungleichungen

$$U_1(a_i, \alpha_2) \leq u \qquad \text{für alle } i \in \{ 1, \ldots, m \}$$

aufstellen und u minimieren. Für α_2 entsprechend.

4.2 Finden von Nash-Gleichgewichten bei allgemeinen Zwei-Personen-Matrixspielen

Für allgemeine Spiele funktioniert die LP-Methode nicht. Benutze stattdessen Instanzen des **Linear Complementarity Problem** (LCP), bei dem zu den linearen (Un-)Gleichungen ein weiterer Typ von Bedingungen hinzukommt: mit zwei Gruppen von Variablen $X = \{ x_1, \dots, x_k \}$ und $Y = \{ y_1, \dots, y_k \}$ können für $i \in \{ 1, \dots, k \}$ Bedingungen der Form $x_i \cdot y_i = 0$ (oder äquivalent $x_i = 0 \vee y_i = 0$) formuliert werden. Im Gegensatz zu linearen Programmen gibt es keine Optimierungsbedingung.

Damit sind Nash-Gleichgewichte für beliebige Zwei-Personen-Matrixspiele beschreibbar. Sei (α, β) ein Nash-Gleichgewicht mit Nutzenprofil (u, v) in dem Spiel $\langle \{ 1, 2 \}, (A_1, A_2), (u_1, u_2) \rangle$ mit $A_1 = \{ a_1, \dots, a_m \}$ und $A_2 = \{ b_1, \dots, b_n \}$. Dann muss gelten:

$$u - U_1(a_i, \beta) \geq 0 \quad \text{für alle } i \in \{ 1, \dots, m \} \tag{4.6}$$
$$v - U_2(\alpha, b_j) \geq 0 \quad \text{für alle } j \in \{ 1, \dots, n \} \tag{4.7}$$
$$\alpha(a_i) \cdot (u - U_1(a_i, \beta)) = 0 \quad \text{für alle } i \in \{ 1, \dots, m \} \tag{4.8}$$
$$\beta(b_j) \cdot (v - U_2(\alpha, b_j)) = 0 \quad \text{für alle } j \in \{ 1, \dots, n \} \tag{4.9}$$
$$\alpha(a_i) \geq 0 \quad \text{für alle } i \in \{ 1, \dots, m \}, \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha(a_i) = 1 \tag{4.10}$$
$$\beta(b_j) \geq 0 \quad \text{für alle } j \in \{ 1, \dots, n \}, \qquad \sum_{j=1}^{n} \beta(b_j) = 1 \tag{4.11}$$

Beachte in den Gleichungen (4.8) und (4.9), dass etwa $\alpha(a_i) \cdot (u - U_1(a_i, \beta)) = 0$ genau dann, wenn $\alpha(a_i) = 0$ oder $u - U_1(a_i, \beta) = 0$. Einer der beiden Faktoren muss aber immer verschwinden, da

1. $\alpha(a_i) = 0$ gilt, falls a_i nicht im Support der Gleichgewichtsstrategie liegt
2. $u - U_1(a_i, \beta) = 0$ gilt, falls a_i im Support der Gleichgewichtsstrategie liegt, weil dann a_i eine beste Antwort auf β ist (vgl. auch Bedingung (4.6)).

Die obige LCP-Formulierung kann mit zusätzlichen Variablen in LCP-Normalform umgeformt werden.

Satz 9. *Ein Strategieprofil (α, β) in gemischten Strategien mit Auszahlungsprofil (u, v) ist ein Nash-Gleichgewicht gdw. es eine Lösung des LCPs (4.6)-(4.11) über (α, β) und (u, v) ist.*

Beweis. Dass jedes Nash-Gleichgewicht eine Lösung des LCPs ist, ist wegen des Support-Lemmas (Lemma 8) klar. Sei also (α, β, u, v) eine Lösung des LCPs. Wegen der Bedingungen (4.10) und (4.11) sind α und β gemischte Strategien. Wegen (4.6) ist u mindestens so groß wie die maximale Auszahlung über alle möglichen reinen Antworten, wegen (4.8) ist u genau das Maximum der Auszahlungen. Wird die reine Strategie a_i mit positiver Wahrscheinlichkeit gespielt, dann hat die Auszahlung für Spieler i als Reaktion auf die Strategie β wegen (4.8) den Wert u. Mit der Linearität des erwarteten Nutzens folgt, dass α eine beste Antwort auf β ist. Analog zeigt man, dass auch β eine beste Antwort auf α und somit (α, β) ein Nash-Gleichgewicht mit Auszahlung (u, v) ist. □

4.2.1 Lösungsalgorithmus für LCPs

Wie löst man ein LCP? Eine Möglichkeit ist der folgende naive Algorithmus.

1. Zähle alle $(2^n-1)\cdot(2^m-1)$ möglichen Paare von Supportmengen auf. Für jedes solche Paar aus $supp(\alpha)$ und $supp(\beta)$:
2. Konvertiere das LCP in ein lineares Programm. Dabei sind (4.6), (4.7), (4.10) und (4.11) bereits lineare Ungleichungen, Bedingungen der Form $\alpha(a_i)\cdot(u-U_1(a_i,\beta))=0$ werden durch eine neue lineare Gleichung ersetzt, nämlich
   - $u-U_1(a_i,\beta)=0$, falls $a_i \in supp(\alpha)$ und
   - $\alpha(a_i)=0$, sonst,

   entsprechend für Bedingungen der Form $\beta(b_j)\cdot(v-U_2(\alpha,b_j))=0$. Da die Kriterien, die optimiert werden sollen, bereits in den Constraints stehen, benötigen wir eine beliebige, von den Constraints unabhängige Optimierungsfunktion, etwa die konstante Nullfunktion.
3. Wende einen Lösungsalgorithmus für lineare Programme, zum Beispiel den Simplex-Algorithmus, auf das transformierte Programm an.

Die Laufzeit des naiven Algorithmus beträgt $\mathcal{O}(p(n+m)\cdot 2^{n+m})$, wobei p ein geeignetes Polynom ist. In der Praxis besser geeignet ist der Lemke-Howson-Algorithmus. Die Frage, ob LcpSolve in **P** liegt, ist offen, aber es liegt auf jeden Fall in **NP**, da man den naiven Algorithmus auch als nichtdeterministischen Polynomialzeitalgorithmus betrachten kann, bei dem im ersten Schritt ein Paar aus $supp(\alpha)$ und $supp(\beta)$ „geraten“, im zweiten Schritt wie oben vorgegangen und im dritten Schritt ein Polynomialzeitalgorithmus für die Lösung linearer Programme angewandt wird.

4.3 Komplexität der Nash-Gleichgewichts-Bestimmung in allgemeinen Zwei-Personen-Spielen

Definition 46 (Notationen der Aussagenlogik). Sei φ eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform (KNF). Wir schreiben $V(\varphi)$ für die Menge der Variablen in φ, $L(\varphi)$ für die Menge der Literale über $V(\varphi)$, d.h. $L(\varphi)=V(\varphi)\cup\{\,\neg v \mid v\in V(\varphi)\,\}$. Dabei unterscheiden wir für $v\in V(\varphi)$ die Variable v von dem positiven Literal v. Ist $\ell\in L(\varphi)$, so ist $\bar{\ell}$ das zu ℓ komplementäre Literal, d.h. $\bar{\ell}=\neg v$, falls $\ell=v$, und $\bar{\ell}=v$, falls $\ell=\neg v$. $v(\ell)$ ist die zum Literal $\ell\in L(\varphi)$ gehörende Variable, $C(\varphi)$ die Menge der Klauseln in φ.

Sei $\Theta: V(\varphi)\to\{\,T,F\,\}$ eine Variablenbelegung. Wir schreiben $L(\Theta)$ für die Menge der Literale, die von Θ erfüllt werden, formal $L(\Theta)=\{\,\ell\in L(\varphi)\mid \Theta\models\ell\,\}$.

Definition 47 (Induziertes Spiel). Sei φ eine KNF-Formel und $n:=|V(\varphi)|$. Das **von φ induzierte Spiel** $G(\varphi)$ ist das symmetrische Zwei-Personen-Spiel mit der Aktionenmenge $L(\varphi)\cup V(\varphi)\cup C(\varphi)\cup\{\,\Box\,\}$ und der Nutzenfunktion u, die definiert ist durch

u	$\ell'\in L(\varphi)$	$v'\in V(\varphi)$	$c'\in C(\varphi)$	$\Box$
$\ell\in L(\varphi)$	1, falls $\ell\neq\bar{\ell}'$ -2, falls $\ell=\bar{\ell}'$	-2	-2	-2
$v\in V(\varphi)$	2, falls $v\neq v(\ell')$ $2-n$, falls $v=v(\ell')$	-2	-2	-2
$c\in C(\varphi)$	2, falls $\ell'\notin c$ $2-n$, falls $\ell'\in c$	-2	-2	-2
$\Box$	1	1	1	0

Definition 48. Sei Θ eine Variablenbelegung zu φ. Die **von Θ induzierte Strategie** α^Θ ist definiert durch

$$\alpha^\Theta(a) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } a \in L(\Theta) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 10 (Satz von Conitzer und Sandholm). *Sei φ eine KNF-Formel. Dann hat $G(\varphi)$ genau die folgenden Nash-Gleichgewichte:*

1. *das reine Profil $(\Box, \Box)$ mit Nutzenprofil $(0, 0)$ und*
2. *für jede erfüllende Belegung Θ von φ das Profil $(\alpha^\Theta, \alpha^\Theta)$ mit Nutzenprofil $(1, 1)$.*

Beweis. Wir beweisen zunächst, dass alle genannten Strategieprofile Nash-Gleichgewichte sind. Das Profil $(\Box, \Box)$ ist offensichtlich ein Nash-Gleichgewicht, denn Abweichungen verringern den Nutzen von 0 auf -2. Sei also Θ eine erfüllende Belegung von φ. Betrachte das Profil $(\alpha^\Theta, \alpha^\Theta)$ und speziell $U(a, \alpha^\Theta)$ für alle *reinen* Strategien $a \in L(\varphi) \cup V(\varphi) \cup C(\varphi) \cup \{\Box\}$. Wir unterscheiden fünf Fälle:

1. falls $a \in L(\Theta)$: Spieler 2 spielt immer ein Literal $a' \in L(\Theta)$. Da auch $a \in L(\Theta)$, können a und a' nicht komplementär sein. Also erhält Spieler 1 den Nutzen 1, d.h. $U(a, \alpha^\Theta) = 1$.
2. falls $a \in L(\varphi) \setminus L(\Theta)$: Spieler 2 spielt ein Literal $a' \in L(\Theta)$. Der Nutzen von Spieler 1 ist abhängig davon, ob a' komplementär zu a ist oder nicht, hat aber in jedem Fall einen Wert kleiner oder gleich 1. Somit ist wegen der Linearität des erwarteten Nutzens auch $U(a, \alpha^\Theta) \leq 1$.
3. falls $a \in V(\varphi)$: Spieler 2 spielt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ ein Literal a' mit $v(a') = a$, was Spieler 1 den Nutzen $2 - n$ bringt, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{n}$ ein anderes Literal, was Spieler 1 den Nutzen 2 bringt. Der erwartete Nutzen von Spieler 1 beträgt somit $U(a, \alpha^\Theta) = \frac{1}{n}(2 - n) + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 2 = \frac{2}{n} - 1 + 2 - \frac{2}{n} = 1$.
4. falls $a \in C(\varphi)$: Wegen $\Theta \models \varphi$ gilt auch $\Theta \models a$, d.h. $L(\Theta) \cap a \neq \varnothing$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $1 - \frac{1}{n}$ beträgt der Nutzen von Spieler 1 also 2, mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $\frac{1}{n}$ beträgt er $2 - n$. Damit ist $U(a, \alpha^\Theta) \leq 2(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}(2 - n) = 1$.
5. falls $a = \Box$: In diesem Fall ist $U(a, \alpha^\Theta) = 1$.

Insgesamt folgt, dass alle $a \in \mathit{supp}(\alpha^\Theta)$ beste Antworten auf α^Θ sind und daher $(\alpha^\Theta, \alpha^\Theta)$ nach dem Support-Lemma ein Nash-Gleichgewicht ist.

Wir müssen nun noch beweisen, dass es in $G(\varphi)$ keine weiteren Nash-Gleichgewichte gibt. Sei dazu (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht in $G(\varphi)$. Wir wollen zunächst ausschließen, dass eine der beiden Strategien α_1, α_2 die reine Strategie $\Box$ ist. Ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \Box$, so liegt zwar ein Nash-Gleichgewicht vor, jedoch kein *neues*, sondern eines der Gleichgewichte, die im Satz von Conitzer und Sandholm erwähnt werden. Ist $\alpha_2 = \Box$, so ist $\alpha_1 = \Box$ die *einzige* beste Antwort auf α_2. Also existiert kein Nash-Gleichgewicht $(\alpha, \Box)$ oder $(\Box, \alpha)$ mit $\alpha \neq \Box$.

Betrachte nun nur noch Fälle mit $\alpha_1(\Box) < 1$ und $\alpha_2(\Box) < 1$. Sei (β_1, β_2) das Strategieprofil, das sich aus (α_1, α_2) in den Situationen ergibt, in denen kein Spieler $\Box$ spielt, d.h. wo für $i \in \{1, 2\}$ gilt, dass $\beta_i(\Box) = 0$ und $\beta_i(a) = \alpha_i(a) \cdot \frac{1}{1 - \alpha_i(\Box)}$ für alle $a \neq \Box$. Es gilt

$U(\beta_1, \beta_2) \geq 1$, denn sonst wäre

$$\begin{aligned} U(\alpha_1, \beta_2) &= \alpha_1(\Box) \cdot 1 + (1 - \alpha_1(\Box)) \cdot U(\beta_1, \beta_2) \\ &< \alpha_1(\Box) \cdot 1 + (1 - \alpha_1(\Box)) \cdot 1 = 1 = U(\Box, \beta_2) \quad \text{sowie} \\ U(\alpha_1, \Box) &= \alpha_1(\Box) \cdot 0 + (1 - \alpha_1(\Box)) \cdot (-2) \\ &< 0 = U(\Box, \Box), \end{aligned}$$

ein Widerspruch, da α_1 dann keine beste Antwort auf α_2, eine Mischung aus β_2 und $\Box$, sein könnte.

Wegen der Symmetrie von $G(\varphi)$ gilt ebenso $U(\beta_2, \beta_1) \geq 1$. Durch Addition der beiden Ungleichungen erhalten wir

$$U(\beta_1, \beta_2) + U(\beta_2, \beta_1) \geq 2. \tag{4.12}$$

An der Nutzenmatrix lässt sich leicht ablesen, dass *kein* Ausgang eine Nutzensumme echt größer als 2 hat. Also haben *alle* möglichen Ausgänge unter (β_1, β_2) eine Nutzensumme von genau 2 und sind daher von der Art (ℓ, ℓ'), wobei $\ell, \ell' \in L(\varphi)$ und $\ell \neq \bar{\ell}'$. Insbesondere spielt Spieler i keine Variablen oder Klauseln, d.h. $\mathit{supp}(\beta_i) \subseteq L(\varphi)$ und $\mathit{supp}(\alpha_i) \subseteq L(\varphi) \cup \{\Box\}$ für $i \in \{1, 2\}$.

Angenommen, $\Box \in \mathit{supp}(\alpha_i)$. Dann kann sich der andere Spieler verbessern, indem er immer $\Box$ spielt, denn erstens ist $\Box$ eine mindestens so gute Antwort auf alle Aktionen aus $L(\varphi) \cup \{\Box\}$ wie die Aktionen aus $L(\varphi)$ und zweitens ist $\Box$ eine echt bessere Antwort auf $\Box$ als die Aktionen aus $L(\varphi)$. Dies steht im Widerspruch zu unserer Voraussetzung, dass (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht ist. Also ist $\Box \notin \mathit{supp}(\alpha_i)$ und damit $\alpha_i = \beta_i$ für alle $i \in \{1, 2\}$.

Wegen Ungleichung (4.12) ist somit $U(\alpha_1, \alpha_2) + U(\alpha_2, \alpha_1) \geq 2$. Daraus folgt, dass

$$U(\alpha_1, \alpha_2) = U(\alpha_2, \alpha_1) = 1 \quad \text{und damit} \tag{4.13}$$

$$u(a_1, a_2) = u(a_2, a_1) = 1 \quad \text{für alle } a_i \in \mathit{supp}(\alpha_i). \tag{4.14}$$

Im nächsten Schritt ist zu zeigen, dass $\alpha_i(\ell) + \alpha_i(\bar{\ell}) = \frac{1}{n}$ für alle $\ell \in L(\varphi)$. Angenommen, es gibt eine Variable $v \in V(\varphi)$ so, dass Spieler i mit Wahrscheinlichkeit $p < \frac{1}{n}$ ein zu v gehöriges Literal spielt. Dann könnte der Gegner durch Spielen von v seinen Nutzen erhöhen, denn

$$U(v, \alpha_i) = p \cdot (2 - n) + (1 - p) \cdot 2 = 2p - pn + 2 - 2p = 2 - pn > 2 - \frac{1}{n} \cdot n = 1,$$

wegen Gleichung (4.13) im Widerspruch dazu, dass (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht ist. Also gibt es keine Variable $v \in V(\varphi)$, deren Literale zusammen mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als $\frac{1}{n}$ gespielt werden, d.h. $\alpha_i(\ell) + \alpha_i(\bar{\ell}) \geq \frac{1}{n}$. Wegen $n = |V(\varphi)|$ folgt durch Aufsummieren über alle Variablen und unter Beachtung, dass α_i eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, dass

$$\alpha_i(\ell) + \alpha_i(\bar{\ell}) = \frac{1}{n} \tag{4.15}$$

für alle $\ell \in L(\varphi)$ und $i \in \{1, 2\}$.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass $\mathit{supp}(\alpha_i)$ einer Variablenbelegung für φ entspricht, d.h. dass $\{\ell, \bar{\ell}\} \not\subseteq \mathit{supp}(\alpha_i)$ für alle $\ell \in L(\varphi)$. Nach Gleichung (4.15) spielt jeder Spieler mindestens ein Element aus $\{\ell, \bar{\ell}\}$ für alle $\ell \in L(\varphi)$. Nach Gleichung (4.14) kann es nicht sein, dass ein Spieler mit positiver Wahrscheinlichkeit ℓ und der andere mit positiver Wahrscheinlichkeit $\overline{\ell}$ spielt, da in diesem Fall der Nutzen beider Spieler -2 wäre. Somit können beide Spieler nur entweder ℓ oder $\overline{\ell}$ spielen, genauer:

$$\alpha_1(\ell) = \alpha_2(\ell) = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \alpha_1(\bar{\ell}) = \alpha_2(\bar{\ell}) = 0$$

oder

$$\alpha_1(\ell) = \alpha_2(\ell) = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_1(\bar{\ell}) = \alpha_2(\bar{\ell}) = \frac{1}{n}.$$

Zum Abschluss des Beweises bleibt noch zu zeigen, dass $supp(\alpha_1)$ einer *erfüllenden* Belegung entspricht. Angenommen, Θ ist eine nicht-erfüllende Variablenbelegung für φ. Sei etwa $\alpha_1 = \alpha^{\Theta}$. Da $\Theta \not\models \varphi$, gibt es eine Klausel $c \in C(\varphi)$ mit $c \cap L(\Theta) = \varnothing$. Für dieses c gilt aber $U(c, \alpha_1) = 2 > 1 = U(\alpha_2, \alpha_1)$, im Widerspruch dazu, dass (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht ist.

Insgesamt haben wir nun bewiesen, dass $(\alpha_1, \alpha_2) = (\Box, \Box)$ oder $(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha^{\Theta}, \alpha^{\Theta})$ für eine φ erfüllende Variablenbelegung Θ sein muss. $\Box$

Korollar 11. *Zu entscheiden, ob ein Nash-Gleichgewicht existiert, bei dem Spieler 1 eine Auszahlung von mindestens k erhält, ist* **NP***-schwer. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen.*

Korollar 12. *Zu entscheiden, ob es ein Nash-Gleichgewicht mit Pareto-optimalem Auszahlungsprofil gibt, ist* **NP***-schwer. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen.*

Korollar 13. *Es ist* **NP***-schwer zu entscheiden, ob es ein Nash-Gleichgewicht gibt, in dem ein Spieler eine bestimmte Aktion manchmal (bzw. nie) spielt. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen.*

5 Extensive Spiele mit perfekter Information

In Spielen hat man oft mehrere Züge hintereinander, was mit strategischen Spielen ohne weiteres nicht modelliert werden kann. Das Spiel kann dann aber durch einen Spielbaum beschrieben werden. Strategien sind nun nicht mehr einzelne Aktionen oder Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Aktionen, sondern Vorschriften, die für jeden Entscheidungspunkt im Spielbaum festlegen, welche Aktion dort gewählt wird.

Die extensive Form eines Spiels kann man in eine strategische Form übersetzen, in welcher man anschließend die Nash-Gleichgewichte bestimmen kann.

5.1 Formalisierung von extensiven Spielen

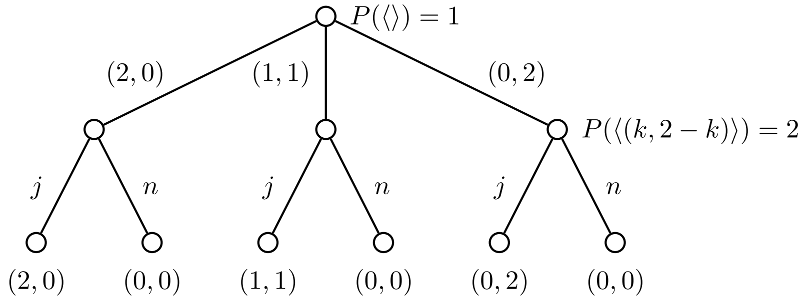
Definition 49 (Extensives Spiel mit perfekter Information). Ein **extensives Spiel mit perfekter Information**, d.h. ein Spiel, in dem alle Spieler zu allen Zeitpunkten alle Informationen besitzen, die sie benötigen, um ihre Entscheidung zu treffen, hat folgende Komponenten:

- Eine endliche nicht-leere Menge N von Spielern.
- Eine Menge H (**Historien**) von Sequenzen mit folgenden Eigenschaften:
  - Die leere Sequenz $\langle\rangle$ gehört zu H
  - Falls $\langle a^1, \ldots, a^k\rangle \in H$ (wobei $k = \infty$ sein kann) und $l < k$, dann ist auch $\langle a^1, \ldots a^l\rangle \in H$
  - Falls für eine unendliche Sequenz $\langle a^i\rangle_{i=1}^{\infty}$ gilt, dass $\langle a^i\rangle_{i=1}^{k} \in H$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann auch $\langle a^i\rangle_{i=1}^{\infty} \in H$.

  Alle unendlichen Historien und alle Historien $\langle a^i\rangle_{i=1}^{k} \in H$, für die es kein a^{k+1} gibt, so dass $\langle a^i\rangle_{i=1}^{k+1} \in H$, heißen terminale Historien. Die Menge der terminalen Historien wird mit Z bezeichnet. Elemente einer Historie heißen **Aktionen**.
- Eine Spielerfunktion $P : H \setminus Z \to N$, die bestimmt, welcher Spieler nach einer Historie als nächster am Zug ist.
- Für jeden Spieler $i \in N$ eine Auszahlungsfunktion $u_i : Z \to \mathbb{R}$ auf der Menge der terminalen Historien.

Das Spiel heißt endlich, wenn H endlich ist. Es hat einen **endlichen Horizont**, falls die Länge der Historien nach oben beschränkt ist.

Beispiel 50 (Verteilungsspiel). Zwei gleiche Objekte sollen auf zwei Spieler verteilt werden. Spieler 1 schlägt die Aufteilung vor, Spieler 2 akzeptiert den Vorschlag oder lehnt ihn ab. Wenn Spieler 2 akzeptiert, werden die Objekte so aufgeteilt, wie von Spieler 1 vorgeschlagen, ansonsten erhält keiner der Spieler etwas. Darstellung als Spielbaum:



Formal ist hier $N = \{1,2\}$, $H = \{\langle\rangle, \langle(2,0)\rangle, \langle(1,1)\rangle, \langle(0,2)\rangle, \langle(2,0), j\rangle, \langle(2,0), n\rangle, \dots\}$, $P(\langle\rangle) = 1$, $P(h) = 2$ für alle $h \in H \setminus Z$ mit $h \neq \langle\rangle$ und $u_1(\langle(2,0), j\rangle) = 2$, $u_2(\langle(2,0), j\rangle) = 0$, usw.

Notation 51. Sei $h = \langle a^1, \dots a^k\rangle$ eine Historie und a eine Aktion. Dann ist (h, a) die Historie $\langle a^1, \dots, a^k, a\rangle$. Falls $h' = \langle b^1, \dots, b^l\rangle$, dann ist $(h, h') := \langle a^1, \dots, a^k, b^1, \dots, b^l\rangle$. Die Menge der Aktionen, aus denen der Spieler $P(h)$ nach einer Historie $h \in H \setminus Z$ auswählen kann, notieren wir als

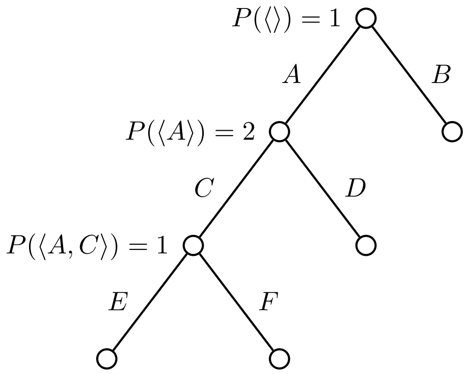
$$A(h) = \{ a \mid (h, a) \in H \}.$$

5.2 Strategien in extensiven Spielen

Definition 52 (Strategie in extensiven Spielen mit perfekter Information). Eine **Strategie** eines Spielers i in einem extensiven Spiel mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ist eine Funktion s_i, die jeder Historie $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = i$ eine Aktion aus $A(h)$ zuweist.

Notation 53 (für endliche Spiele). Eine Strategie für einen Spieler wird notiert als Folge von Aktionen an Entscheidungspunkten, die in Breitensuche-Reihenfolge besucht werden.

Beispiel 54. Strategienotation in einem endlichen Spiel:



Die Strategien für Spieler 1 sind AE, AF, BE und BF, die Strategien für Spieler 2 sind C und D.

Man notiert auf jeden Fall für jeden einzelnen Knoten die Entscheidung, also auch für Kombinationen, die nie entstehen können. Man betrachtet diese Teilstrategien mit, da der andere Spieler die Strategie auch ändern könnte. Man kann eine Strategie als Programm auffassen, das definiert, was an jedem Punkt zu tun ist.

Definition 55 (Ergebnis). Das **Ergebnis** $O(s)$ für ein Strategieprofil $s = (s_i)_{i \in N}$ ist die, möglicherweise unendliche, terminale Historie $h = \langle a^i \rangle_{i=1}^k$ (mit $k \in \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$), für die gilt, dass für alle $l \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq l < k$:

$$s_{P(\langle a^1, \ldots, a^l \rangle)}(\langle a^1, \ldots a^l \rangle) = a^{l+1}.$$

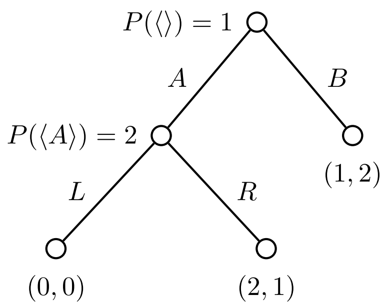
5.3 Nash-Gleichgewichte in extensiven Spielen

Definition 56 (Nash-Gleichgewicht in extensiven Spielen mit perfekter Information). Ein **Nash-Gleichgewicht** in einem extensiven Spiel mit perfekter Information $\langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ist ein Strategieprofil s^*, so dass für jeden Spieler $i \in N$ und für alle Strategien s_i gilt, dass

$$u_i(O(s^*_{-i}, s^*_i)) \geq u_i(O(s^*_{-i}, s_i)).$$

Äquivalent kann man die **strategische Form** von extensiven Spielen definieren.

Beispiel 57. Betrachte das durch den folgenden Spielbaum beschriebene extensive Spiel mit perfekter Information.



Spieler 1 hat die Strategien A und B, Spieler 2 die Strategien L und R zur Auswahl. Die strategische Form dieses Spieles ist

		Spieler 2	
		L	R
Spieler 1	A	$0, 0$	$2, 1$
	B	$1, 2$	$1, 2$

Die Nash-Gleichgewichte der strategischen Form sind (B, L) und (A, R). Das Nash-Gleichgewicht (B, L) ist jedoch unrealistisch: Spieler 1 spielt hier B, weil dies optimal ist, unter der Bedingung, dass Spieler 2 L spielt. Tatsächlich würde Spieler 2 jedoch in der Situation, in der er zwischen L und R entscheiden muss, niemals L spielen, da er sich dadurch selbst schlechter stellen würde. Man bezeichnet L daher als „leere“ oder „unplausible Drohung“.

Ebenso tritt das Phänomen der „leeren Drohungen“ beim Aufteilungsspiel auf: die Nash-Gleichgewichte der strategischen Form sind $((2,0), jjj)$, $((2,0), jjn)$, $((2,0), jnj)$, $((2,0), jnn)$, $((1,1), njj)$, $((1,1), njn)$, $((0,2), nnj)$, $((2,0), nnj)$ und $((2,0), nnn)$. Bis auf $((2,0), jjj)$ und $((1,1), njj)$ enthalten alle Nash-Gleichgewichte „leere Drohungen“.

5.4 Teilspielperfekte Gleichgewichte

Idee: um Gleichgewichte mit leeren Drohungen auszuschließen, fordert man, dass die Strategien nicht nur in der strategischen Form des gesamten Spieles, sondern auch in der jedes Teilspiels im Gleichgewicht sind.

Definition 58 (Teilspiel). Ein **Teilspiel** eines extensiven Spiels mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$, das nach der Historie h beginnt, ist das Spiel $\Gamma(h) = \langle N, H|_h, P|_h, (u_i|_h) \rangle$, wobei $H|_h = \{ h' \mid (h, h') \in H \}$, $P|_h(h') = P(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$ und $u_i|_h(h') = u_i(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$.

Für eine Strategie s_i und Historie h des Spiels Γ sei $s_i|_h$ die durch s_i induzierte Strategie für $\Gamma(h)$, genauer $s_i|_h(h') = s_i(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$. O_h ist die Ergebnisfunktion für $\Gamma(h)$.

Definition 59 (Teilspielperfektes Gleichgewicht). Ein **teilspielperfektes Gleichgewicht (TPG)** in einem extensiven Spiel mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ist ein Strategieprofil s^*, so dass für jeden Spieler i und für jede nicht-terminale Historie $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = i$ gilt:

$$u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h)) \geq u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s_i))$$

für jede Strategie s_i des Spielers i im Teilspiel $\Gamma(h)$.

Beispiel 60. Betrachte das extensive Spiel aus Beispiel 57. Die strategische Form dieses Spieles besitzt zwei Nash-Gleichgewichte, nämlich (A, R) und (B, L). Betrachte zunächst (A, R): in der Historie $h = A$ ist die auf das Teilspiel eingeschränkte Strategiekombination teilspielperfekt, da Spieler 2 dann R wählt. In der Historie $h = \langle\rangle$ erhält Spieler 1 den Nutzen 1 bei Wahl von B und den Nutzen 2 bei Wahl von A; also ist (A, R) ein TPG.

Betrachte nun (B, L): dieses Strategieprofil ist nicht teilspielperfekt, da L in der Historie $h = \langle A \rangle$ nicht den Nutzen von Spieler 2 maximiert.

Beispiel 61. Betrachte das Verteilungsspiel aus Beispiel 50. Es gibt drei echte Teilspiele, in denen jeweils Spieler 2 am Zug ist. Nach der Historie $(2,0)$ sind sowohl j als auch n teilspielperfekt, nach $(1,1)$ und $(0,2)$ jeweils nur j. Für das gesamte Spiel kommen also nur Strategieprofile in Frage, bei denen Spieler 2 eine der Strategien jjj oder njj spielt. Davon sind $((2,0), jjj)$ und $((1,1), njj)$ teilspielperfekte Gleichgewichte, $((2,0), njj)$, $((1,1), jjj)$, $((0,2), njj)$ und $((0,2), jjj)$ nicht.

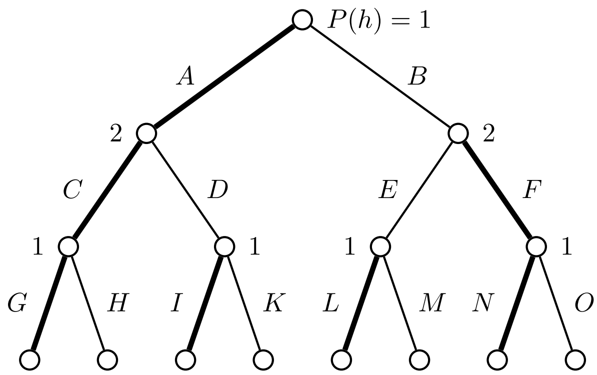
Lemma 14 (Ein-Schritt-Abweichung). *Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ein extensives Spiel mit perfekter Information und* endlichem Horizont. *Das Strategieprofil s^* ist ein teilspielperfektes*

Gleichgewicht von Γ *gdw. für jeden Spieler* $i \in N$ *und jede Historie* $h \in H$ *mit* $P(h) = i$ *gilt:*

$$u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h)) \geq u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s_i))$$

für jede Strategie s_i *des Spielers* i *im Teilspiel* $\Gamma(h)$*, die sich von* $s^*_i|_h$ *nur in der Aktion unterscheidet, die direkt nach der initialen Historie von* $\Gamma(h)$ *vorgeschrieben wird.*

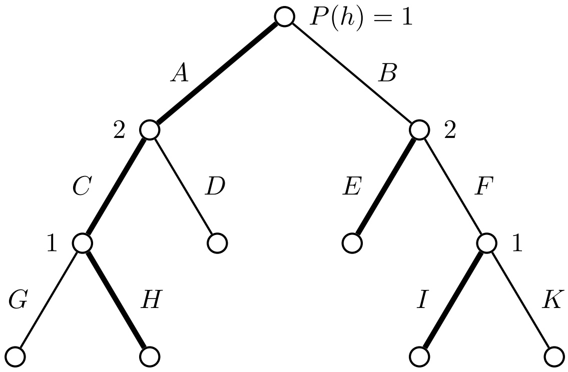
Beweis. Falls s^* ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, gilt die Eigenschaft natürlich. Angenommen, s^* ist kein teilspielperfektes Gleichgewicht. Dann existieren eine Historie h und ein Spieler i so, dass es eine profitable Abweichung s_i in $\Gamma(h)$ gibt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass die Anzahl der Historien h' mit der Eigenschaft, dass $s_i(h') \neq s^*_i|_h(h')$ ist, höchstens so groß wie die Länge der längsten Historie in $\Gamma(h)$ ist. Diese Annahme ist erlaubt, da es zu jeder profitablen Abweichung s_i von $s^*_i|_h$ eines Spielers i eine profitable Abweichung $\tilde{s_i}$ dieses Spielers gibt, bei der alle Historien h' mit $\tilde{s_i}(h') \neq s^*_i|_h(h')$ auf *einem* Pfad des Spielbaumes liegen. Betrachte dazu etwa die folgende Visualisierung, wobei $s^*_1|_h = AGILN$ und $s^*_2|_h = CF$:



Angenommen, $s_1 = BHKMO$ ist eine profitable Abweichung von Spieler 1. Dann ist auch $\tilde{s_1} = BGILO$ eine profitable Abweichung. $\tilde{s_1}$ unterscheidet sich aber nur an zwei Historien von $s^*_1|_h$, während die längste Historie in $\Gamma(h)$ die Länge drei hat.

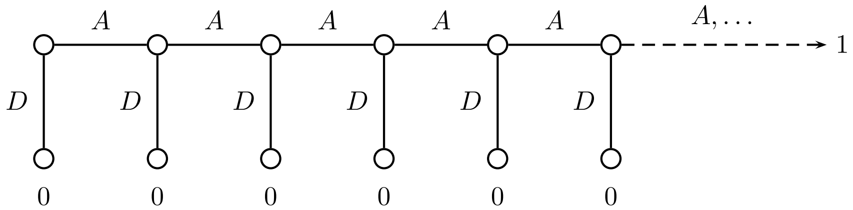
Wegen des endlichen Horizonts von Γ ist diese Anzahl der Historien h' mit der Eigenschaft, dass $s_i(h') \neq s^*_i|_h(h')$ ist, endlich. Wähle also eine profitable Abweichung s_i in $\Gamma(h)$ so, dass die Anzahl der Historien h' mit $s_i(h') \neq s^*_i|_h(h')$ minimal ist. Sei dann h^* die längste Historie in $\Gamma(h)$ mit $s_i(h') \neq s^*_i|_h(h')$. Dann ist die initiale Historie in $\Gamma(h, h^*)$ die einzige, an der sich $s_i|_{h^*}$ von $s^*_i|_{(h,h^*)}$ unterscheidet. Außerdem ist $s_i|_{h^*}$ eine profitable Abweichung in $\Gamma(h, h^*)$, da wir gefordert haben, dass h^* die *längste* Historie in $\Gamma(h)$ mit $s_i(h') \neq s^*_i|_h(h')$ ist, d.h. $\Gamma(h, h^*)$ ist das gesuchte Teilspiel. □

Beispiel 62. Betrachte das folgende extensive Spiel mit perfekter Information Γ:



Will man zeigen, dass das Profil (AHI, CE) ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, so genügt es, für Spieler 1 die abweichenden Strategien G im Teilspiel $\Gamma(\langle A, C\rangle)$, K im Teilspiel $\Gamma(\langle B, F\rangle)$ und BHI in Γ sowie für Spieler 2 die abweichenden Strategien D im Teilspiel $\Gamma(\langle A\rangle)$ und F im Teilspiel $\Gamma(\langle B\rangle)$ zu betrachten. Insbesondere ist es z. B. nicht notwendig, die abweichende Strategie BGK von Spieler 1 in Γ auf Profitabilität zu untersuchen.

Bemerkung 63. Die entsprechende Aussage für Spiele ohne endlichen Horizont gilt nicht. Betrachte etwa das folgende Ein-Spieler-Spiel:



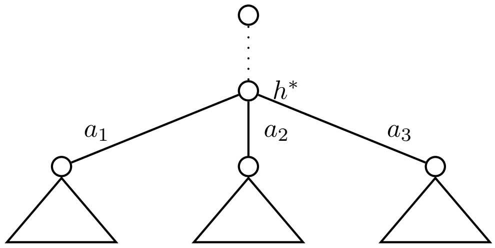
Die Strategie s_i mit $s_i(h) = D$ für alle $h \in H \setminus Z$ ist kein teilspielperfektes Gleichgewicht, da sie von der Strategie s_i^* mit $s_i^*(h) = A$ für alle $h \in H \setminus Z$ dominiert wird, erfüllt jedoch die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft, denn für jedes Teilspiel gilt, dass der Spieler keine bessere Auszahlung erhalten kann, wenn er nur den ersten Schritt ändert.

Definition 64. Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ein extensives Spiel mit perfekter Information und endlichem Horizont. Dann bezeichnet $\ell(\Gamma)$ die Länge der längsten Historie von Γ, d.h. $\ell(\Gamma) = \max\{\, |h| \mid h \in H \,\}$.

Satz 15 (Satz von Kuhn). *Jedes endliche extensive Spiel mit perfekter Information hat ein teilspielperfektes Gleichgewicht.*

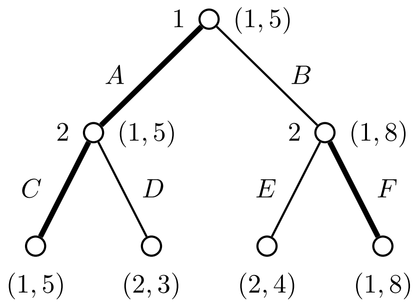
Beweis. Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ein endliches extensives Spiel mit perfekter Information. Konstruiere ein teilspielperfektes Gleichgewicht durch Induktion über die Länge $\ell(\Gamma(h))$ für alle Teilspiele $\Gamma(h)$. Konstruiere parallel dazu Funktionen $t_i : H \to \mathbb{R}$ für alle Spieler $i \in N$ so, dass $t_i(h)$ die Auszahlung für Spieler i in einem teilspielperfekten Gleichgewicht im Teilspiel $\Gamma(h)$ angibt.

Falls $\ell(\Gamma(h)) = 0$, dann ist $t_i(h) = u_i(h)$ für alle $i \in N$. Sei $t_i(h)$ für alle $h \in H$ mit $\ell(\Gamma(h)) \leq k$ bereits definiert. Betrachte nun $h^* \in H$ mit $\ell(\Gamma(h^*)) = k + 1$ und $P(h^*) = i$.



Für alle $a \in A(h^*)$ ist $\ell(\Gamma(h^*, a)) \leq k$. Setze $s_i(h^*) := \operatorname{argmax}_{a \in A(h^*)} t_i(h^*, a)$ und $t_j(h^*) := t_j(h^*, s_i(h^*))$ für alle $j \in N$. Induktiv erhalten wir dabei ein Strategieprofil s, das die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft erfüllt. Mit dem vorigen Lemma 14 folgt, dass das Strategieprofil s ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist. $\square$

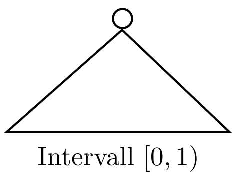
Beispiel 65. Betrachte den Spielbaum



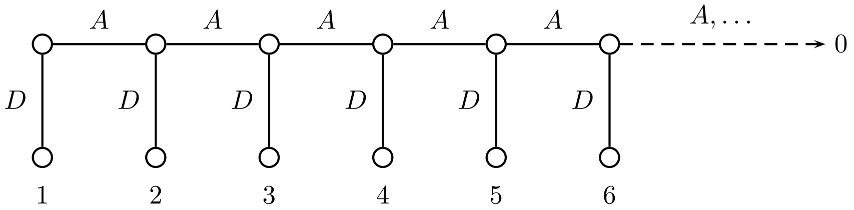
Hier sind $s_2(\langle A \rangle) = C$, $t_1(\langle A \rangle) = 1$, $t_2(\langle A \rangle) = 5$, $s_2(\langle B \rangle) = F$, $t_1(\langle B \rangle) = 1$, $t_2(\langle B \rangle) = 8$ sowie etwa $s_1(\langle \rangle) = A$, $t_1(\langle \rangle) = 1$ und $t_2(\langle \rangle) = 5$.

Bemerkung 66. Die entsprechende Aussage gilt nicht für unendliche Spiele.

1. Das folgende Ein-Personen-Spiel besitzt einen endlichen Horizont, aber einen unendlichen Verzweigungsgrad, nämlich unendlich viele Aktionen $a \in A = [0, 1)$ mit Auszahlungen $u_1(\langle a \rangle) = a$ für alle $a \in A$. Es besitzt kein teilspielperfektes Gleichgewicht.



2. Auch bei unendlichem Horizont, aber endlichem Verzweigungsgrad muss kein teilspielperfektes Gleichgewicht existieren, wie das folgende Beispiel zeigt, wo u_i die Anzahl der gemachten Schritte ist, d.h. $u_1(AAA\dots) = 0$ und $u_1(\underbrace{AA\dots A}_{n} D) = n + 1$.



Beachte außerdem, dass der Satz von Kuhn nichts über die Eindeutigkeit teilspielperfekter Gleichgewichte aussagt. Falls keine zwei Historien von einem Spieler gleich bewertet werden, dann ist das TPG jedoch eindeutig.

5.5 Zwei Erweiterungen

5.5.1 Zufall

Definition 67 (Extensives Spiel mit perfekter Information und Zufallszügen). Ein **extensives Spiel mit perfekter Information und Zufallszügen** ist ein Tupel $\Gamma = \langle N, H, P, f_c, (u_i) \rangle$, wobei N, H und u_i wie bei extensiven Spielen definiert sind, die Spielerfunktion $P : H \to N \cup \{ c \}$ auch den Wert c für einen Zufallsknoten annehmen kann, und für jedes $h \in H$ mit $P(h) = c$ die Funktion $f_c(\cdot|h)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $A(h)$ ist, wobei die Wahrscheinlichkeitsmaße $f_c(\cdot|h)$ für alle $h \in H$ unabhängig voneinander sind.

Strategien in extensiven Spielen mit perfekter Information und Zufallszügen sind wie zuvor definiert. Der Ausgang eines Spieles bei gegebenem Strategieprofil ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß über der Menge der terminalen Historien und U_i ist die erwartete Auszahlung für Spieler i.

Bemerkung 68. Die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft und der Satz von Kuhn gelten weiterhin. Beim Beweis des Satzes von Kuhn muss man nun mit dem *erwarteten* Nutzen arbeiten.

5.5.2 Simultane Züge

Definition 69 (Simultane Züge). Ein **extensives Spiel mit perfekter Information und simultanen Zügen** ist ein Tupel $\langle N, H, P, (u_i) \rangle$, wobei N, H und (u_i) wie zuvor definiert sind und $P : H \to \operatorname{Pot}(N)$ jeder nichtterminalen Historie eine *Menge* von Spielern zuordnet. Für alle $h \in H \setminus Z$ existiert eine Familie $(A_i(h))_{i \in P(h)}$ so, dass

$$A(h) = \{ a \mid (h, a) \in H \} = \bigtimes_{i \in P(h)} A_i(h).$$

Die beabsichtigte Interpretation simultaner Züge ist, dass alle Spieler aus $P(h)$ gleichzeitig ziehen. Strategien sind dann Funktionen $s_i : h \mapsto a_i$ mit $a_i \in A_i(h)$, Historien sind Sequenzen von Vektoren von Aktionen. In der Definition teilspielperfekter Gleichgewichte muss die Bedingung $P(h) = i$ durch $i \in P(h)$ ersetzt werden.

Bemerkung 70. Der Satz von Kuhn gilt nicht mehr, da zum Beispiel das Matching-Pennies-Spiel auch ein extensives Spiel mit perfekter Information und mit simultanen Zügen ist.

Beispiel 71 (Kuchenverteilspiel). Das Kuchenverteilspiel für 3 Spieler funktioniert wie folgt: zunächst schlägt Spieler 1 vor, wie der Kuchen unter den Spielern aufgeteilt werden soll. Dazu ordnet er jedem Spieler $i \in \{1, 2, 3\}$ einen Anteil $x_i \in [0, 1]$ zu.

Danach entscheiden sich die anderen Spieler *gleichzeitig* und unabhängig voneinander, ob sie mit dieser Aufteilung einverstanden sind. Sie können die Aufteilung entweder akzeptieren (J) oder ablehnen (N).

Wenn alle anderen Spieler die Aufteilung akzeptieren, erhält jeder Spieler $i \in \{1, 2, 3\}$ den ihm zugewiesenen Anteil des Kuchens (Nutzen x_i). Anderenfalls diskutieren die Spieler, bis der Kuchen vergammelt (Nutzen 0).

Formal ergibt sich das folgende extensive Spiel mit perfekter Information und simultanen Zügen: $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$, wobei $N = \{1, 2, 3\}$, $H = \{\langle\rangle\} \cup \{\langle x \rangle \mid x \in X\} \cup \{\langle x, y \rangle \mid x \in X, y \in \{J, N\} \times \{J, N\}\}$ mit $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i = 1\}$. Außerdem ist $P(\langle\rangle) = \{1\}$ und $P(\langle x \rangle) = \{2, 3\}$ für alle $x \in X$ sowie $u_i(\langle x, y \rangle) = 0$, falls $y \in \{(J, N), (N, J), (N, N)\}$ und $u_i(\langle x, y \rangle) = x_i$, falls $y = (J, J)$.

Die teilspielperfekten Gleichgewichte in Γ lassen sich wie folgt bestimmen: wir betrachten zunächst die Teilspiele, die sich ergeben, nachdem Spieler 1 eine Aufteilung $x = (x_1, x_2, x_3)$ gewählt hat. X ist die Menge aller legalen Aufteilungen.

In allen solchen Teilspielen gibt es mindestens zwei Nash-Gleichgewichte, nämlich (J, J) (beide Spieler akzeptieren die Aufteilung) und (N, N) (keiner der beiden Spieler akzeptiert die Aufteilung). Zusätzlich gibt es in den Teilspielen mit $x_2 = 0$ das Gleichgewicht (N, J) (nur Spieler 3 akzeptiert die Aufteilung) und in den Teilspielen mit $x_3 = 0$ das Gleichgewicht (J, N) (nur Spieler 2 akzeptiert die Aufteilung).

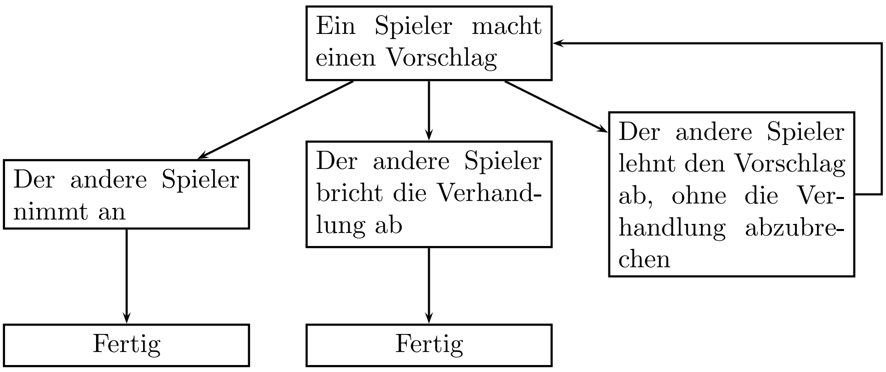
Seien nun s_2 und s_3 beliebige Strategien für die Spieler 2 bzw. 3, so dass für alle Aufteilungen $x \in X$ das Profil $(s_2(\langle x \rangle), s_3(\langle x \rangle))$ eines der oben beschriebenen Nash-Gleichgewichte ist.

Sei ferner $X_J = \{x \in X \mid s_2(\langle x \rangle) = s_3(\langle x \rangle) = J\}$ die Menge der akzeptierten Aufteilungen unter s_2 und s_3. Dann unterscheiden wir drei Fälle:

1. $X_J = \varnothing$ oder $x_1 = 0$ für alle $x \in X_J$. Dann ist (s_1, s_2, s_3) für beliebig gewähltes s_1 ein teilspielperfektes Gleichgewicht.
2. $X_J \neq \varnothing$ und es gibt Verteilungen $x_{\max} = (x_1, x_2, x_3) \in X_J$, die $x_1 > 0$ maximieren. Dann ist (s_1, s_2, s_3) genau dann ein teilspielperfektes Gleichgewicht, wenn $s_1(\langle\rangle)$ eine solche Verteilung $x_{\max}$ ist.
3. $X_J \neq \varnothing$ und es gibt keine Verteilungen $(x_1, x_2, x_3) \in X_J$, die x_1 maximieren. Dann gibt es kein teilspielperfektes Gleichgewicht, bei dem Spieler 2 der Strategie s_2 und Spieler 3 der Strategie s_3 folgt.

6 Verhandlungsspiele

Ein Verhandlungsspiel besitzt die allgemeine Struktur, dass ein Spieler einen Vorschlag macht und der andere Spieler den Vorschlag beantwortet, indem er die Verhandlung abbricht, den Vorschlag annimmt oder ihn ablehnt, ohne die Verhandlung abzubrechen, worauf einer der Spieler ein neues Angebot macht.



Häufig spielt die für die Verhandlung aufgewandte Zeit eine Rolle, d.h. später erlangter Nutzen ist weniger wert als früherer. Oft werden die Vorschläge abwechselnd gemacht.

6.1 Verhandlungsspiele mit abwechselnden Vorschlägen

Verhandlungsspiele mit abwechselnden Vorschlägen sind spezielle extensive Zwei-Personen-Spiele mit perfekter Information.

Definition 72 (Verhandlungsspiel mit abwechselnden Vorschlägen). Ein **Verhandlungsspiel mit abwechselnden Vorschlägen** ist ein extensives Spiel mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (\preceq_i)_{i \in N} \rangle$, wobei $N = \{1, 2\}$ ist und H mit Hilfe einer kompakten und zusammenhängenden Teilmenge X eines euklidischen Raums, der Menge $T = \mathbb{N}$ der Zeitpunkte sowie von zwei Aktionen R (Vorschlag ablehnen) und A (Vorschlag annehmen) wie folgt definiert ist: es gibt vier Typen von Historien, nämlich

Typ I: die leere Historie $\langle\rangle$ und Historien der Form $\langle x^0, R, x^1, \ldots, x^t, R \rangle$ mit $t \in \mathbb{N}$ und $x^0, x^1, \ldots, x^t \in X$,
Typ II: Historien der Form $\langle x^0, R, \ldots, R, x^t \rangle$ mit $t \in \mathbb{N}$ und $x^0, \ldots, x^t \in X$,
Typ III: Historien der Form $\langle x^0, R, \ldots, R, x^t, A \rangle$ mit $t \in \mathbb{N}$ und $x^0, \ldots, x^t \in X$ und
Typ IV: Historien der Form $\langle x^0, R, x_1, R, \ldots \rangle$ mit $x^0, x^1, \ldots \in X$.

Historien von Typ I und Typ II sind nichtterminale Historien, solche von Typ III und Typ IV sind terminale Historien. Es ist $P(h) = 1$, falls h eine Historie von Typ I oder Typ II mit ungeradem t oder die leere Historie ist. $P(h) = 2$, falls h von Typ I oder Typ II und t gerade ist. Statt Auszahlungsfunktionen $(u_i)_{i \in N}$ verwenden wir **Präferenzrelationen**, d.h. reflexive und transitive Relationen, $(\preceq_i)_{i \in N}$. Neben der Reflexivität und Transitivität wollen wir einige weitere Anforderungen an die Relationen $\preceq_i$ stellen. Wir nehmen an, dass der Weg zu einer Vereinbarung für deren Bewertung unerheblich ist, und partitionieren die terminalen Historien entsprechend in Äquivalenzklassen: die Historien von Typ IV bilden die Äquivalenzklasse D, die Konfliktvereinbarung, d.h. das Ergebnis bei einem Scheitern der Verhandlung. Die Historien von Typ III werden in Klassen $(x, t) \in X \times T$ eingeteilt, wobei eine Klasse (x, t) alle Historien der Form $\langle x^0, R, x^1, \ldots, R, x^t, A \rangle$ mit $x = x^t$ umfasst. Die Präferenzrelation $\preceq_i$ von Spieler i ist nun über der Menge $(X \times T) \cup \{ D \}$ der Äquivalenzklassen von Historien definiert. Sie muss folgende Bedingungen erfüllen:

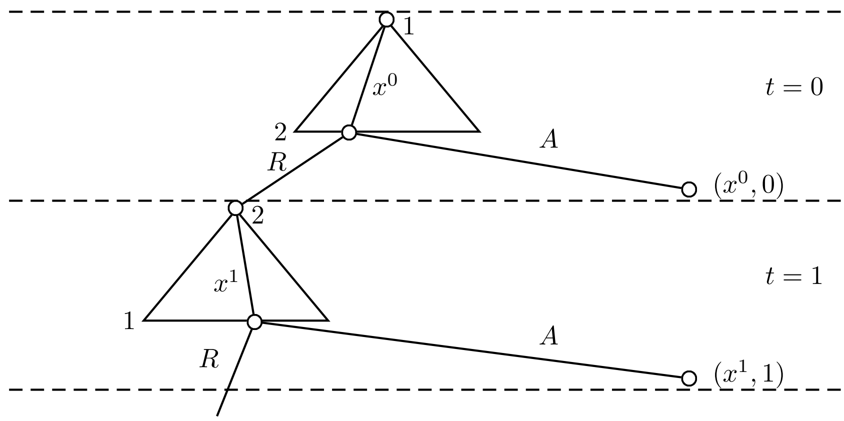
- alles ist mindestens so gut wie das Scheitern der Verhandlung, d.h. $(x, t) \succeq_i D$ für alle $(x, t) \in X \times T$,
- Zeit ist wertvoll, d.h. $(x, t) \succeq_i (x, t+1)$ für alle $(x, t) \in X \times T$ mit der strikten Präferenz $(x, 0) \succ_i D$ für alle $x \in X$,
- Präferenz ist stationär, d.h. $(x, t) \succeq_i (y, t + 1)$ gdw. $(x, 0) \succeq_i (y, 1)$ und $(x, t) \succeq_i (y, t)$ gdw. $(x, 0) \succeq_i (y, 0)$ für alle $x, y \in X$ und $t \in T$, und
- Präferenz ist stetig, d.h. falls $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in X mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x \in X$ und $\lim_{n \to \infty} y_n = y \in X$ sind und für zwei Zeitpunkte $s, t \in T$ gilt, dass $(x_n, t) \succeq_i (y_n, s)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $(x, t) \succeq_i (y, s)$.

Lemma 16. *Ist $\preceq_i$ eine Präferenzrelation, die die Eigenschaften aus Definition 72 besitzt, so kann $\preceq_i$ durch eine Auszahlungsfunktion u_i repräsentiert werden, genauer: für jedes $\delta \in (0, 1)$ gibt es eine stetige Funktion $u_i : X \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $s, t \in T$:*

$$(x, t) \succeq_i (y, s) \text{ gdw. } \delta^t u_i(x) \geq \delta^s u_i(y).$$

Beweis. Ohne Beweis. □

Die ersten zwei Runden eines Verhandlungsspiels mit abwechselnden Vorschlägen können etwa wie folgt visualisiert werden:



Beispiel 73 (Kuchenverteilspiel mit zwei Spielern). Die Menge der möglichen Verhandlungsergebnisse ist $X = \{ (x_1, x_2) \,|\, x_i \geq 0 \text{ für } i \in \{ 1, 2 \} \text{ und } x_1 + x_2 = 1 \}$. Für

die Präferenzrelationen gilt, dass $(x,t) \succeq (y,t)$ gdw. $x_i \geq y_i$ sowie $((0,1),0) \sim_1 D$ und $((1,0),0) \sim_2 D$. D.h. man kann $\preceq_i$ durch $\delta_i^t w_i(x_i)$ repräsentieren, wobei $0 < \delta_i < 1$, w_i monoton wachsend und stetig sowie $w_i(0) = 0$ ist.

6.2 Teilspielperfekte Gleichgewichte

Definition 74 (Pareto-Grenze). Die **Pareto-Grenze** einer Menge von Vereinbarungen X besteht aus den Elementen $x \in X$, für die es kein $y \in X$ mit $(y,0) \succ_i (x,0)$ für alle $i \in \{1,2\}$ gibt. Ein solches x heißt **effiziente Vereinbarung**.

Zur Beschreibung der teilspielperfekten Gleichgewichte in Verhandlungsspielen mit abwechselnden Vorschlägen wollen wir zunächst einige zusätzliche Annahmen machen:

A1 Keine zwei verschiedenen Einigungen werden gleich bewertet, d.h. es gibt kein Paar $(x,y) \in X^2$ mit $x \neq y$ und $(x,0) \sim_i (y,0)$ für beide Spieler $i \in \{1,2\}$.

A2 Für $i,j \in \{1,2\}$ und $i \neq j$ gilt $(b^i,1) \sim_j (b^i,0) \sim_j D$, wobei b^i die für i beste Vereinbarung ist.

A3 Die Pareto-Grenze ist strikt monoton, d.h. für effiziente Vereinbarungen x existiert keine Vereinbarung $y \neq x$ mit $(y,0) \succeq_i (x,0)$ für alle $i \in \{1,2\}$.

A4 Es existiert ein eindeutiges Paar (x^*,y^*) von effizienten Vereinbarungen, für das gilt: $(x^*,1) \sim_1 (y^*,0)$ und $(y^*,1) \sim_2 (x^*,0)$.

Satz 17. *Ein Verhandlungsspiel mit abwechselnden Vorschlägen $(X,(\succeq_i)_{i\in N})$, das A1 bis A4 erfüllt, hat ein teilspielperfektes Gleichgewicht. Sei (x^*,y^*) das Paar, für das gilt, dass $(x^*,1) \sim_1 (y^*,0)$ und $(y^*,1) \sim_2 (x^*,0)$. Dann*

1. *schlägt Spieler 1 in jedem teilspielperfekten Gleichgewicht x^* vor, akzeptiert y^* und jeden Vorschlag y mit $(y,0) \succeq_1 (y^*,0)$ und weist jeden Vorschlag y mit $(y,0) \prec_1 (y^*,0)$ zurück und*
2. *schlägt Spieler 2 in jedem teilspielperfekten Gleichgewicht y^* vor, akzeptiert x^* und jeden Vorschlag x mit $(x,0) \succeq_2 (x^*,0)$ und weist jeden Vorschlag x mit $(x,0) \prec_2 (x^*,0)$ zurück.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass das beschriebene Strategieprofil ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist. Da Verhandlungsspiele mit abwechselnden Vorschlägen die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft besitzen (ohne Beweis), genügt es zu prüfen, ob eine einschrittige Abweichung in einem Teilspiel zu einer Verbesserung führen kann. Wir untersuchen dies o.B.d.A. nur für Spieler 2. Betrachte eine Historie der Form $h = \langle x^0, R, \ldots, R, x^t\rangle$, nach der Spieler 2 am Zug ist. Akzeptiert er den Vorschlag, so ist der Ausgang (x^t,t), weist er ihn zurück, ist der Ausgang $(y^*,t{+}1)$, weil Spieler 2 im nächsten Schritt y^* vorschlägt und Spieler 1 diesen Vorschlag annimmt. Da die Präferenzrelation stationär ist, gilt $(x^t,t) \succeq_2 (y^*,t+1)$ genau dann, wenn $(x^t,0) \succeq_2 (y^*,1)$. Nach A4 gilt außerdem $(y^*,1) \sim_2 (x^*,0)$. Da Spieler 2 genau dann akzeptiert, wenn $(x^t,0) \succeq_2 (x^*,0)$, ist die Entscheidungsregel von Spieler 2 optimal und eine einschrittige Abweichung bringt keinen zusätzlichen Nutzen.

Betrachte nun eine Historie der Form $h = \langle x^0, R, \ldots, R, x^{t-1}, R\rangle$, nach der Spieler 2 am Zug ist. Macht er einen für ihn selbst schlechteren Vorschlag als y^*, d.h. ist $(x^t,0) \prec_2 (y^*,0)$, so ist sein Ergebnis schlechter als bei einem Vorschlag von y^*, wenn Spieler 1 den Vorschlag annimmt, und höchstens so gut wie bei einem Vorschlag von y^*, wenn Spieler 1 ablehnt, denn dann ist der Ausgang $(x^*, t+1) \sim_2 (y^*, t+2) \preceq_2 (y^*, t)$. Macht Spieler 2 einen für ihn selbst besseren Vorschlag als y^*, d.h. ist $(x^t, 0) \succ_2 (y^*, 0)$, lehnt Spieler 1 ab, weil y^* effizient ist, und das Ergebnis ist wie oben $(x^*, t+1)$.

Wir müssen noch zeigen, dass das teilspielperfekte Gleichgewicht eindeutig ist. Da die Präferenzen stationär sind, sind alle Teilspiele G_i, in denen Spieler i mit einem Vorschlag beginnt, identisch. Sei $\delta \in (0,1)$ und $u_i : X \to \mathbb{R}$ für $i \in \{1,2\}$ so, dass $\delta^t u_i(x)$ die Präferenzrelation $\succeq_i$ repräsentiert. Seien außerdem für $i \in \{1,2\}$:

$$\begin{aligned} M_i(G_i) &:= \sup\{\, \delta^t u_i(x) \mid \text{ex. ein TPG von } G_i \text{ mit dem Ergebnis } (x,t)\,\} \quad \text{und} \\ m_i(G_i) &:= \inf\{\, \delta^t u_i(x) \mid \text{ex. ein TPG von } G_i \text{ mit dem Ergebnis } (x,t)\,\}. \end{aligned}$$

In einem ersten Schritt zeigen wir, dass $M_1(G_1) = m_1(G_1) = u_1(x^*)$ und $M_2(G_2) = m_2(G_2) = u_2(y^*)$. Sei dazu φ eine Funktion, die jeweils die Paare der Pareto-Grenze beschreibt, d.h. die $\varphi(u_1(x)) = u_2(x)$ für alle effizienten $x \in X$ erfüllt. Da X zusammenhängend und $\preceq_i$ eine stetige Relation ist, ist der Wertebereich von φ ein Intervall, φ ist stetig und wegen A3 ist φ eine Bijektion und strikt monoton fallend.

Falls Spieler 1 den Vorschlag von Spieler 2 im Teilspiel G_2 zurückweist, bekommt Spieler 1 nicht mehr als $\delta M_1(G_1)$, d.h. Spieler 1 muss jeden Vorschlag, der ihm einen Nutzen von mehr als $\delta M_1(G_1)$ bringt, akzeptieren. Also bekommt Spieler 2 in jedem teilspielperfekten Gleichgewicht von G_2 nicht weniger als $\varphi(\delta M_1(G_1))$, d.h.

$$m_2(G_2) \geq \varphi(\delta M_1(G_1)) \tag{6.1}$$

In jedem teilspielperfekten Gleichgewicht von G_1 erhält Spieler 2 mindestens $\delta m_2(G_2)$, da er den ersten Vorschlag von Spieler 1 zurückweisen kann, d.h. Spieler 1 kann nicht mehr als $\varphi^{-1}(\delta m_2(G_2))$ erhalten, kurz

$$M_1(G_1) \leq \varphi^{-1}(\delta m_2(G_2)) \tag{6.2}$$

Damit und mit Ungleichung (6.1) erhalten wir, da φ strikt monoton fallend ist, dass

$$M_1(G_1) \leq \varphi^{-1}(\delta\varphi(\delta M_1(G_1))) \tag{6.3}$$

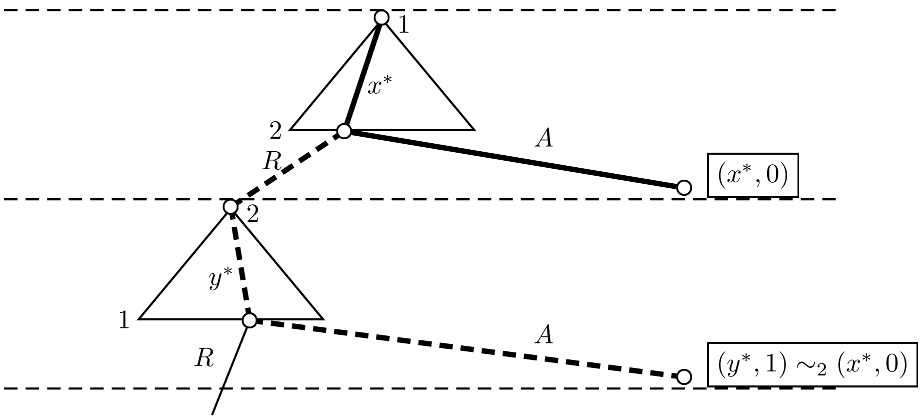
Da es ein teilspielperfektes Gleichgewicht von G_1 gibt, bei dem x^* sofort akzeptiert wird, ist $M_1(G_1) \geq u_1(x^*)$. Also ist noch zu zeigen, dass auch $M_1(G_1) \leq u_1(x^*)$ gilt. Wegen A2 haben wir $\delta u_2(b^1) = u_2(b^1)$, d.h. $u_2(b^1) = 0$. Wegen A3 haben wir $\delta\varphi(\delta u_1(b^1)) > 0 = u_2(b^1) = \varphi(u_1(b^1))$. Da φ strikt monoton fallend ist, folgt

$$u_1(b^1) > \varphi^{-1}(\delta\varphi(\delta u_1(b^1))). \tag{6.4}$$

Mit der Stetigkeit von φ und Ungleichung (6.3) folgt daraus, dass es ein U_1 mit $M_1(G_1) \leq U_1 < u_1(b^1)$ und $U_1 = \varphi^{-1}(\delta\varphi(\delta U_1))$ gibt. Falls $M_1(G_1) > u_1(x^*)$, ist $U_1 \neq u_1(x^*)$. Konstruiere a^* und b^* als effiziente Vorschläge mit $u_1(a^*) = U_1$ und $u_1(b^*) = \delta u_1(a^*)$, d.h. $(a^*, 1) \sim_1 (b^*, 0)$. Außerdem gilt $u_2(b^*) = \varphi(\delta u_1(a^*)) = \varphi(\delta U_1)$ und $u_2(a^*) = \varphi(u_1(a^*)) = \varphi(U_1) = \varphi(\varphi^{-1}(\delta\varphi(\delta U_1))) = \delta\varphi(\delta U_1)$ und damit $\delta u_2(b^*) = u_2(a^*)$, also $(b^*, 1) \sim_2 (a^*, 0)$. Damit ist wegen $a^* \neq x^*$ die Eindeutigkeit von (x^*, y^*) aus A4 verletzt, d.h. die Annahme $M_1(G_1) > u_1(x^*)$ muss falsch sein. Damit folgt $M_1(G_1) = u_1(x^*)$. Eine ähnliche Argumentation führt zu $m_1(G_1) = u_1(x^*)$, $M_2(G_2) = u_2(y^*)$ und $m_2(G_2) = u_2(y^*)$.

In jedem teilspielperfekten Gleichgewicht von G_1 schlägt Spieler 1 x^* vor und Spieler 2 nimmt diesen Vorschlag an, denn der Nutzen von Spieler 1 beträgt nach der obigen Argumentation $u_1(x^*)$ und der Nutzen von Spieler 2 mindestens $\delta u_2(y^*) = u_2(x^*)$, da Spieler 2 den Vorschlag zurückweisen und dann den Nutzen $u_2(y^*)$ in G_2 erhalten könnte. Wegen A1 und der Effizienz von x^* muss Spieler 1 x^* vorschlagen und Spieler 2 akzeptieren.

Würde Spieler 2 ablehnen, dann selbst y^* vorschlagen und Spieler 1 dies akzeptieren, hätte er zwar denselben Nutzen wie in dem Fall, dass er schon in der ersten Runde den Vorschlag x^* akzeptiert, der Nutzen von Spieler 1 wäre jedoch geringer und die Strategien damit nicht im Gleichgewicht. Spieler 1 könnte profitabel abweichen, indem er gleich zu Beginn einen anderen Vorschlag macht.



In jedem teilspielperfekten Gleichgewicht akzeptiert Spieler 2 jeden Vorschlag x mit $(x, 0) \succeq_2 (x^*, 0)$ und weist jeden Vorschlag x mit $(x, 0) \prec_2 (x^*, 0)$ zurück, denn eine Ablehnung von Spieler 2 führt zu G_2 und damit zu Nutzen $u_2(y^*)$ für Spieler 2. Wegen $u_2(x^*) = \delta u_2(y^*)$ muss Spieler 2 jeden Vorschlag x mit $(x, 0) \succeq_2 (x^*, 0)$ akzeptieren und jeden Vorschlag x mit $(x, 0) \prec_2 (x^*, 0)$ zurückweisen. □

7 Spieltheorie in Multiagentensystemen

7.1 Überblick

In diesem Kapitel wollen wir der Frage nachgehen, wie unabhängig entwickelte, eigennützige Agenten kooperieren können. Das wichtigste Konzept sind wie im letzten Kapitel Verhandlungen, genauer: Verhandlungen über eine mögliche Zusammenarbeit der Agenten.

Beispiel 75. Zwei benachbarte Familien müssen ihre Kinder zur Schule zu bringen, wobei auch Kinder der anderen Familie mitgenommen werden können. Dann stellt sich die Frage, wer wann welche Kinder fährt und wie ein entsprechender Plan ausgehandelt wird.

Die Verhandlungsergebnisse können durch das *Verhandlungsprotokoll*, die *erlaubten Verhandlungsergebnisse* und die *Verhandlungsstrategien* der Agenten beeinflusst werden.

Zu den besonders wünschenswerten Eigenschaften von Verhandlungsmechanismen gehören

1. Effizienz, d.h. das Verhandlungsergebnis sollte Pareto-optimal oder global optimal sein. Ein Ergebnis ist Pareto-optimal, wenn es kein anderes Ergebnis gibt, für das ein Spieler mehr bekommen kann und bei dem alle anderen nicht weniger erhalten, und es ist global optimal, wenn es die Summe der Nutzenwerte der beteiligten Spieler maximiert,
2. Stabilität, d.h. es sollte keine Belohnung für eine Abweichung von der Konvention geben,
3. Einfachheit, d.h. es sollte möglichst wenig Berechnungs- und Kommunikationsaufwand nötig sein,
4. Verteiltheit, d.h. es sollte keine zentrale Steuerungsinstanz geben (eine zentrale Kontrollinstanz ist jedoch evtl. sinnvoll), sowie
5. Symmetrie, d.h. gleichartige Agenten sollten gleich behandelt werden.

Verhandlungen können in unterschiedlichen Domänen stattfinden, die sich grob in drei Typen unterteilen lassen, nämlich

Task-orientierte Domänen (TOD): Es gibt eine Menge von zugewiesenen Aufgaben, die neu verteilt werden können. Jeder Agent kann jede Aufgabe erfüllen. Es gibt keine Konflikte zwischen den Aufgaben und alle Verhandlungspartner können nur gewinnen. Verhandlungen in Task-orientierten Domänen entsprechen dem monotonen Planungsproblem mit mehreren Agenten.

Zustands-orientierte Domänen (ZOD): Jeder Agent möchte einen Zielzustand erreichen und es kann Konflikte geben zwischen den Zielen verschiedener Agenten geben, die aufgelöst werden müssen. Verhandlungen in Zustands-orientierten Domänen entsprechen normaler Handlungsplanung.

Wert-orientierte Domänen (WOD): Wie Zustands-orientierte Domänen, jedoch haben hier die Zustände Bewertungen durch die Agenten, die dadurch zu Kompromissen kommen können. Verhandlungen in Wert-orientierten Domänen entsprechen entscheidungstheoretischem Planen (MDPs).

Im Folgenden werden einige wichtige vereinfachende Annahmen getroffen:

1. die Agenten maximieren ihren *erwarteten* Nutzen,
2. Verhandlungen finden isoliert statt, haben also keine Auswirkungen auf zukünftige Verhandlungen,
3. die Nutzenwerte der verschiedenen Agenten sind vergleichbar, d.h. es gibt eine gemeinsame „Währung",
4. die Fähigkeiten der Agenten sind symmetrisch, d.h. alle Agenten können das gleiche,
5. öffentlich abgegebene Verpflichtungen werden eingehalten und
6. es findet kein *expliziter* Transfer von Nutzen statt.

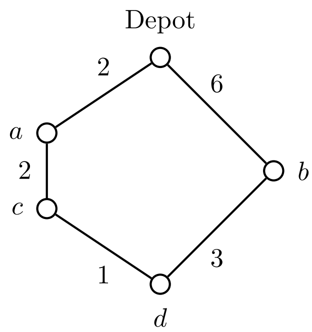
7.2 Task-orientierte Domänen

Definition 76 (Task-orientierte Domäne). Eine **Task-orientierte Domäne (TOD)** ist ein Tupel $\langle T, N, c \rangle$. Dabei ist

- T die Menge aller möglichen **Aufgaben**,
- N die endliche, nicht-leere Menge von **Agenten** und
- $c : [\mathrm{Pot}(T)] \mapsto \mathbb{R}^+$ die **Kostenfunktion**. $[\mathrm{Pot}(T)]$ ist dabei die Menge aller *endlichen* Teilmengen von T. c ist monoton, d.h. für $X \subseteq Y$ ist $c(X) \leq c(Y)$ und $c(\varnothing) = 0$.

Definition 77 (Begegnung). Eine **Begegnung** in einer TOD $\langle T, N, c \rangle$ ist ein Profil $(T_1, \ldots, T_{|N|})$ von endlichen Teilmengen von T. Dabei sind die Elemente von T_i die von Agent i zu erledigenden Aufgaben.

Beispiel 78 (Logistik-Domäne). Agenten müssen Container von einem zentralen Depot zu Lagerhäusern transportieren, deren Lage durch einen gewichteten Graphen $G = (V, E)$ beschrieben ist. Sie können vor dem Start im zentralen Depot ohne Kosten Container tauschen. Die Task-Menge ist die Menge der Knoten V. Für $X \subseteq V$ sind die Kosten $c(X)$ die Länge eines minimal langen am Depot beginnenden Pfades, der alle Knoten aus X enthält. Die Agenten brauchen nicht zum Depot zurückzukommen. Der folgende Graph repräsentiert eine mögliche Instanz der Logistik-Domäne:



Besteht die Begegnung aus den Aufgabenmengen $T_1 = \{ a, c \}$ und $T_2 = \{ b, d \}$, ist der kürzeste Weg für Agent 2, um b und d zu erreichen, der Weg vom Depot über a, c und d

nach b mit Kosten 8. Der Weg ist um eine Einheit kürzer als der vom Depot über b nach d. Also könnte Agent 2 ohne weitere Kosten auf seinem Weg noch die Aufgaben a und c von Agent 1 mit erledigen.

Beispiel 79 (Postboten-Domäne). Die Postboten-Domäne ist identisch mit der Logistik-Domäne, mit der Ausnahme, dass die Agenten am Ende zum Depot zurückkehren müssen.

Beispiel 80 (Datenbankanfrage-Domäne). Agenten greifen mit SQL-Anfragen auf eine Datenbank zu. Sie können Resultate von Anfragen und Teilanfragen ohne Kosten untereinander austauschen. Die Taskmenge ist die Menge aller SQL-Anfragen, die Kostenfunktion ordnet einer Menge von Anfragen die Anzahl aller elementaren Datenbank-Operationen zu, die zur Beantwortung der Anfragen durchgeführt werden müssen.

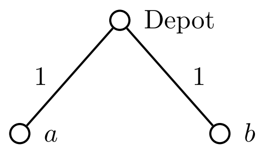
7.2.1 Verhandlungsmechanismen für Task-orientierte Domänen

Im weiteren sei immer $N = \{1, 2\}$, da in diesem Fall mögliche Koalitionen zwischen Agenten nicht berücksichtigt werden müssen.

Vereinbarungen und Verhandlungsmenge

Definition 81 (Reine Vereinbarung). Sei (T_1, T_2) eine Begegnung in der Task-orientierten Domäne $\langle T, \{1, 2\}, c\rangle$. Dann heißt ein Profil (D_1, D_2) von Taskmengen eine **reine Vereinbarung** für (T_1, T_2), falls $D_1 \cup D_2 = T_1 \cup T_2$. Die Kosten der Vereinbarung für Agent $k \in \{1, 2\}$ sind $C_k(D_1, D_2) = c(D_k)$.

Beispiel 82. Betrachte die folgende Instanz der Logistik-Domäne mit $T_1 = \{a, b\}$ und $T_2 = \{a\}$:



Zu den möglichen Aufgabenverteilungen mit $D_1 \cup D_2 = T_1 \cup T_2 = \{a, b\}$ gehören

$$(\varnothing, \{a, b\}), (\{a\}, \{b\}), (\{a, b\}, \varnothing), (\{a, b\}, \{a, b\}), \ldots,$$

insgesamt neun mögliche Vereinbarungen.

Definition 83 (Nutzen einer Vereinbarung). Sei (T_1, T_2) eine Begegnung in der Task-orientierten Domäne $\langle T, \{1, 2\}, c\rangle$ und $\delta = (D_1, D_2)$ eine reine Vereinbarung für (T_1, T_2). Dann heißt

$$U_k(\delta) := c(T_k) - C_k(\delta) = c(T_k) - c(D_k)$$

Nutzen der reinen Vereinbarung δ für Spieler k und die reine Vereinbarung $K = (T_1, T_2)$ heißt **Konfliktvereinbarung**. Beachte, dass die Konfliktvereinbarung beiden Agenten Nutzen 0 bringt, da $U_k(K) = c(T_k) - C_k(K) = c(T_k) - c(T_k) = 0$.

Beispiel 84. Betrachte die Domäne und die Begegnung aus Beispiel 82 mit der Vereinbarung $(\{b\}, \{a\})$. Der Nutzen von Spieler 1 beträgt $U_1(\{b\}, \{a\}) = c(\{a, b\}) - C_1(\{b\}, \{a\}) = 3 - 1 = 2$. Spieler 2 erhält dabei Nutzen 0.

Definition 85 (Dominanz und Äquivalenz von Vereinbarungen). Seien δ und δ' reine Vereinbarungen in einer Task-orientierten Domäne. Wir sagen,

- δ **dominiert** δ' ($\delta \succ \delta'$), falls $U_k(\delta) \geq U_k(\delta')$ für alle $k \in N$ und es ein $k \in N$ gibt mit $U_k(\delta) > U_k(\delta')$, und
- δ **dominiert** δ' **schwach** ($\delta \succeq \delta'$), falls $U_k(\delta) \geq U_k(\delta')$ für alle $k \in N$.
- δ heißt **äquivalent** zu δ' ($\delta \approx \delta'$), falls $\delta \succeq \delta'$ und $\delta' \succeq \delta$.

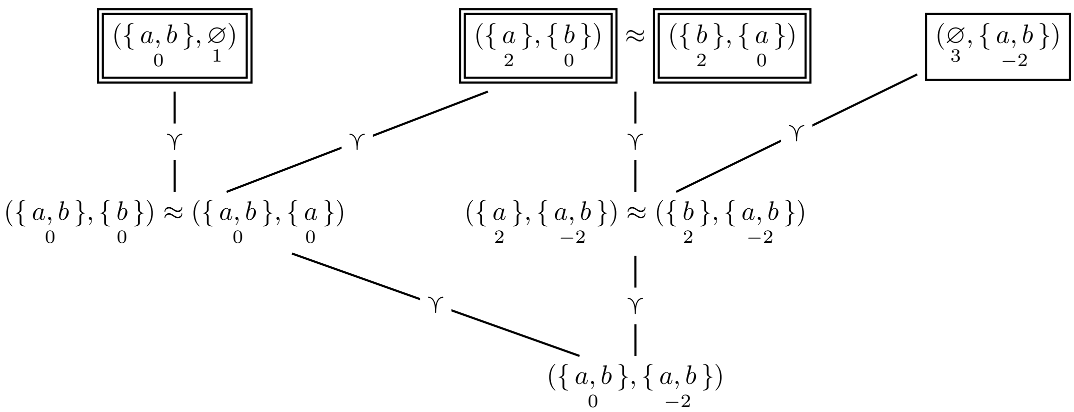
Definition 86 (Individuell rationale Vereinbarung). Eine Vereinbarung δ heißt **individuell rational**, falls $\delta \succeq K$.

Beachte, dass kein Agent eine Vereinbarung akzeptieren würde, die nicht individuell rational ist.

Definition 87 (Pareto-optimale Vereinbarung). Eine Vereinbarung δ heißt **Pareto-optimal**, falls es keine Vereinbarung δ' mit $\delta' \succ \delta$ gibt.

Definition 88 (Verhandlungsmenge). Die Menge aller Vereinbarungen, die individuell rational und Pareto-optimal sind, heißt **Verhandlungsmenge (VM)**.

Beispiel 89. Betrachte die Domäne und die Begegnung aus Beispiel 82. Hier gilt



Dabei stellen die unter den Taskmengen von Spieler 1 bzw. 2 stehenden Zahlen den Nutzen der jeweiligen Vereinbarung für Spieler 1 bzw. 2 dar. Die Vereinbarung mit einfachem Rahmen ist Pareto-optimal, aber nicht individuell rational, die Vereinbarungen mit doppeltem Rahmen sind sowohl Pareto-optimal als auch individuell rational. Die Verhandlungsmenge für diese Begegnung besteht also aus den drei Vereinbarungen

$$(\{a, b\}, \varnothing), (\{a\}, \{b\}) \text{ und } (\{b\}, \{a\}).$$

Satz 18. *Für jede Begegnung in einer Task-orientierten Domäne ist die Verhandlungsmenge nicht-leer.*

Beweis. Die Konfliktvereinbarung K ist individuell rational. Da es nur endlich viele mögliche Vereinbarungen gibt, kann es keine unendliche Kette $\cdots \succ \delta_2 \succ \delta_1 \succ \delta_0 = K$ geben. Also gibt es eine endliche Kette

$$\delta_n \succ \cdots \succ \delta_2 \succ \delta_1 \succ \delta_0 = K$$

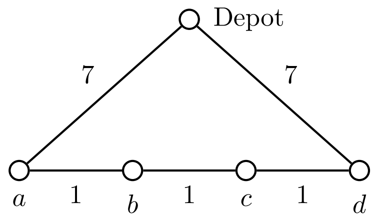
mit $n \geq 0$ so, dass kein δ_{n+1} mit $\delta_{n+1} \succ \delta_n$ existiert. Also ist δ_n Pareto-optimal. Weil aus $\delta_{i+1} \succ \delta_i$ und der individuellen Rationalität von δ_i folgt, dass auch δ_{i+1} individuell rational ist, liegt δ_n in der Verhandlungsmenge. □

7.2.2 Verhandlungsprotokolle

Ein mögliches Verhandlungsprotokoll lässt sich wie folgt beschreiben:

1. In jeder Runde machen beide Agenten Angebote aus der Verhandlungsmenge.
2. Resultiert ein Angebot für einen der Agenten in nicht weniger Nutzen als dieser fordert, wird das Angebot akzeptiert, d.h. seien δ_i, δ_k die Angebote von Agent i bzw. k ($i \neq k$). Dann wird δ_i akzeptiert, falls $U_k(\delta_k) \leq U_k(\delta_i)$. Falls beide Angebote akzeptiert werden, wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit zwischen beiden ausgewählt.
3. Falls kein Angebot akzeptiert wird, dann gibt es eine weitere Runde, in der nur Angebote gemacht werden dürfen, die den anderen Agenten nicht schlechter stellen als das vorige Angebot.
4. Falls beide Agenten in einer Runde keine Zugeständnisse machen, wird die Verhandlung mit der Konfliktvereinbarung beendet.

Beispiel 90. Betrachte die folgende Begegnung in der Logistik-Domäne:



Es sind $T_1 = T_2 = \{\, a, b, c, d \,\}$. Die Verhandlungsmenge besteht aus den Vereinbarungen

Id	Vereinbarung δ	$U_1(\delta)$	$U_2(\delta)$
A	$(\{\, a, b, c, d \,\}, \varnothing)$	0	10
B	$(\{\, a, b, c \,\}, \{\, d \,\})$	1	3
C	$(\{\, a, b \,\}, \{\, c, d \,\})$	2	2
D	$(\{\, a \,\}, \{\, b, c, d \,\})$	3	1
E	$(\varnothing, \{\, a, b, c, d \,\})$	10	0

sowie den zu B, C und D symmetrischen Vereinbarungen B', C' und D'. Eine mögliche Verhandlung könnte mit diesen Vorschlägen ablaufen:

Runde t	Vorschlag δ_1^t von Agent 1	Vorschlag δ_2^t von Agent 2
1	E	A
2	E	B
3	E	C
4	D	D

Definition 91 (Monotones Zugeständnisprotokoll). Sei (T_1, T_2) eine Begegnung in der Task-orientierten Domäne $\langle T, \{ 1, 2 \}, c\rangle$ mit Verhandlungsmenge V. Das **monotone Zugeständnisprotokoll** über reinen Vereinbarungen ist das extensive Spiel mit simultanen Zügen $\langle \{ 1, 2 \}, H, P, (u_i)_{i\in\{ 1,2 \}}\rangle$, das wie folgt definiert ist:

1. H enthält alle endlichen Folgen von Vereinbarungspaaren $(\delta_1^n, \delta_2^n)_{n=1,\ldots,t}$, für die gilt:
   a) $\delta_i^n \in V$ für alle $i \in \{ 1, 2 \}$ und $n \in \{ 1, \ldots, t \}$,
   b) $U_i(\delta_j^n) \geq U_i(\delta_j^m)$ für alle $i, j \in \{ 1, 2 \}$ mit $i \neq j$ und $m, n \in \{ 1, \ldots, t \}$ mit $m < n$,
   c) $U_i(\delta_j^n) > U_i(\delta_j^m)$ für mindestens ein $i \in \{ 1, 2 \}$, $j \in \{ 1, 2 \} \setminus \{ i \}$ und alle $m, n \in \{ 1, \ldots, t - 1 \}$ mit $m < n$ sowie
   d) $U_i(\delta_j^n) < U_i(\delta_i^n)$ für alle $i, j \in \{ 1, 2 \}$ mit $i \neq j$ und alle $n \in \{ 1, \ldots, t - 1 \}$.
2. Für alle nicht-terminalen Historien $h \in H \setminus Z$ gilt: $P(h) = \{ 1, 2 \}$.
3. Für alle terminalen Historien $h = \langle \ldots, (\delta_1^*, \delta_2^*)\rangle \in Z$ definiere die **Akzeptanzmengen**

$$N_h^A = \{ i \in \{ 1, 2 \} \mid U_i(\delta_j^*) \geq U_i(\delta_i^*) \text{ für } j \in \{ 1, 2 \} \setminus \{ i \} \}.$$

Dann gilt, dass für alle $i \in \{ 1, 2 \}$:

$$u_i(h) = \begin{cases} 0, & \text{falls } N_h^A = \varnothing \\ U_i(\delta_2^*), & \text{falls } N_h^A = \{ 1 \} \\ U_i(\delta_1^*), & \text{falls } N_h^A = \{ 2 \} \\ \frac{1}{2}(U_i(\delta_1^*) + U_i(\delta_2^*)), & \text{falls } N_h^A = \{ 1, 2 \} \end{cases}$$

Bemerkung 92. Das monotone Zugeständnisprotokoll über reinen Vereinbarungen ist endlich.

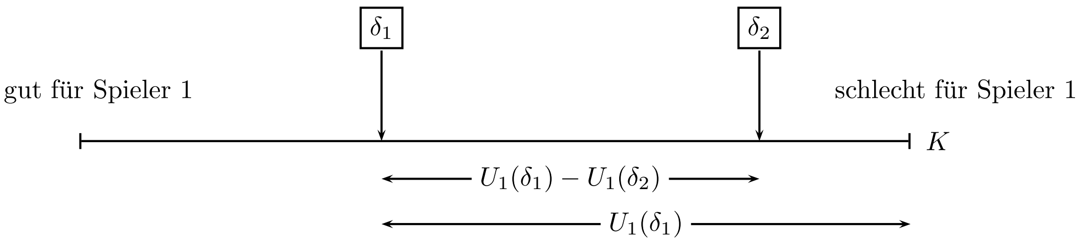
7.2.3 Verhandlungsstrategien

Sind die Verhandlungsmenge und das Verhandlungsprotokoll festgelegt, stellt sich die Frage, wie sich die Agenten bei der Verhandlung verhalten sollen. Da das monotone Zugeständnisprotokoll über reine Vereinbarungen ein extensives Spiel mit simultanen Zügen ist, sollten sie eine TPG-Strategie verfolgen – aber welche?

Beispiel 93. Betrachte die taskorientierte Domäne $\langle T, \{ 1, 2 \}, c\rangle$ mit $T = \{ p, q, r, s, t \}$ und $c(T') = |T'|$ für alle $T' \subseteq T$ und darin die Begegnung $\langle \{ p, q, r, s, t \}, \{ p, q, r, s, t \}\rangle$, bei der beide Spieler alle fünf Aufgaben ausführen müssen. Die Verhandlungsmenge besteht aus allen Vereinbarungen mit Nutzenprofilen in $\{ (5, 0), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (4, 1), (0, 5) \}$. Wir identifizieren im Folgenden diese Menge der möglichen Nutzenprofile mit der Verhandlungsmenge.

Angenommen, Spieler 1 bietet am Anfang $(5, 0)$ und macht keine Zugeständnisse, und Spieler 2 bietet am Anfang $(0, 5)$ und kommt Spieler 1 immer um einen minimalen Schritt entgegen. Dieses Strategieprofil ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht, aber keine zufriedenstellende Lösung. Intuitiv sollte der Spieler, der bei einem Konflikt mehr zu verlieren hat, das nächste Zugeständnis machen.

Hat etwa Spieler 1 zuletzt das Angebot δ_1 und Spieler 2 das Angebot δ_2 gemacht, so hat Spieler 1 die Differenz $U_1(\delta_1) - U_1(\delta_2)$ zu verlieren, wenn er Spieler 2 ganz entgegenkommt, und $U_1(\delta_1) - U_1(K) = U_1(\delta_1)$, wenn die Verhandlung mit der Konfliktvereinbarung endet. Hat Spieler 2 bisher nur geringe Zugeständnisse gemacht, d.h. ist $U_1(\delta_1) - U_1(\delta_2)$ ähnlich groß wie $U_1(\delta_1)$, ist Spieler 1 eher bereit, durch ein Beharren auf seinem letzten Angebot das Risiko einzugehen, die Verhandlung scheitern zu lassen, als in dem Fall, dass Spieler 2 schon große Zugeständnisse gemacht hat und $U_1(\delta_1) - U_1(\delta_2)$ im Verhältnis zu $U_1(\delta_1)$ klein ist:



Definition 94 (Risikobereitschaft). Betrachte die nicht-terminale Historie $(\delta_1^n, \delta_2^n)_{n=1,\dots,t}$. Die **Risikobereitschaft** von Spieler i ist definiert als

$$\mathit{Risiko}_i^t := \frac{U_i(\delta_i^t) - U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)}.$$

Je höher der *Risiko*-Wert eines Spielers ist, desto eher geht er ein Risiko ein.

Definition 95 (Zeuthen-Strategie). Die **Zeuthen-Strategie** für Spieler i legt das folgende Verhalten des Agenten fest:

1. Biete zu Beginn eine Vereinbarung δ_i^1 aus der Verhandlungsmenge, die den Nutzen U_i maximiert.
2. Nach der Historie $(\delta_1^n, \delta_2^n)_{n=1,\dots,t}$
   - biete wieder $\delta_i^{t+1} = \delta_i^t$, falls $\mathit{Risiko}_i^t > \mathit{Risiko}_j^t$ für $i \neq j$,
   - ansonsten betrachte alle δ aus der Verhandlungsmenge mit

     $$U_j(\delta_i^t) < U_j(\delta) \leq U_j(\delta_j^t)$$

     und

     $$\underbrace{\frac{U_i(\delta) - U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta)}}_{\text{„}\mathit{Risiko}_i^{t+1}\text{“}} \geq \underbrace{\frac{U_j(\delta_j^t) - U_j(\delta)}{U_j(\delta_j^t)}}_{\text{„}\mathit{Risiko}_j^{t+1}\text{“}}.$$

     Biete dann unter diesen Vereinbarungen ein solches δ, das $U_i(\delta)$ maximiert.

Beispiel 96. Betrachte die Begegnung aus Beispiel 93. Folgen sowohl Spieler 1 als auch Spieler 2 der Zeuthen-Strategie, so ergibt sich die Verhandlung

Runde t	δ_1^t	δ_2^t	Risiko_1^t	Risiko_2^t
1	$(5,0)$	$(0,5)$	1	1
2	$(4,1)$	$(1,4)$	$3/4$	$3/4$
3	$(3,2)$	$(2,3)$	$1/3$	$1/3$
4	$(2,3)$	$(3,2)$		

Da beide Spieler in der letzten Runde ein Zugeständnis machen, wird das Verhandlungsergebnis zufällig aus den beiden Vereinbarungen $(2,3)$ und $(3,2)$ ausgewählt.

Folgt nur Spieler 1 der Zeuthen-Strategie, während Spieler 2 niemals Zugeständnisse macht, ergibt sich folgendes Bild:

Runde t	δ_1^t	δ_2^t	$Risiko_1^t$	$Risiko_2^t$
1	$(5,0)$	$(0,5)$	1	1
2	$(4,1)$	$(0,5)$	1	$4/5$
3	$(4,1)$	$(0,5)$		

Die Verhandlung endet also mit der Konfliktvereinbarung.

Satz 19 (Satz von Harsanyi). *Wenn beide Agenten die Zeuthen-Strategie verfolgen, dann einigen sie sich auf eine Vereinbarung, die das Produkt der Nutzenwerte der beiden Spieler maximiert.*

Lemma 20. *Spieler i macht nach t Schritten ein Zugeständnis gdw. $\pi(\delta_i^t) \leq \pi(\delta_j^t)$, wobei $\pi(\delta) := U_1(\delta)U_2(\delta)$.*

Beweis. Es ist

$$Risiko_i^t = \frac{U_i(\delta_i^t) - U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} = 1 - \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
Risiko_i^t \leq Risiko_j^t \quad & \text{gdw.} \quad 1 - \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} \leq 1 - \frac{U_j(\delta_i^t)}{U_j(\delta_j^t)} \\
& \text{gdw.} \quad \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} \geq \frac{U_j(\delta_i^t)}{U_j(\delta_j^t)} \\
& \text{gdw.} \quad U_i(\delta_j^t) \cdot U_j(\delta_j^t) \geq U_j(\delta_j^t) \cdot U_i(\delta_j^t) \\
& \text{gdw.} \quad \pi(\delta_j^t) \geq \pi(\delta_i^t).
\end{aligned}$$

□

Lemma 21. *Macht Spieler i nach t Schritten ein Zugeständnis, so gilt $\pi(\delta_i^{t+1}) \geq \pi(\delta_j^t)$.*

Beweis. Analog zum vorherigen Lemma. □

Beweis des Satzes von Harsanyi. Aus den beiden Lemmata folgt, dass die Abbildung $n \mapsto \max\{\pi(\delta_1^n), \pi(\delta_2^n)\}$ monoton wächst, denn macht Spieler i ein Zugeständnis, so ist $\pi(\delta_i^t) \leq \pi(\delta_j^t) \leq \pi(\delta_i^{t+1})$, und macht er kein Zugeständnis, ist $\pi(\delta_i^t) = \pi(\delta_i^{t+1})$. Für die letzten Angebote gilt $\pi(\delta_1^t) = \pi(\delta_2^t)$.

Angenommen, die Spieler einigen sich auf $\delta^* \in V$, aber es gibt ein $\delta' \in V$ mit $\pi(\delta') > \pi(\delta^*)$. Dann gibt es ein $i \in \{1, 2\}$ mit $U_i(\delta') > U_i(\delta^*)$, denn angenommen, $U_i(\delta') \leq U_i(\delta^*)$ für alle $i \in \{1, 2\}$. Dann wäre wegen $U_1(\delta'), U_2(\delta'), U_1(\delta^*), U_2(\delta^*) \geq 0$ (δ', δ^* individuell rational) auch $\pi(\delta') \leq \pi(\delta^*)$.

Sei dann $n \in \mathbb{N}$ der erste Schritt, in dem Spieler i zum ersten Mal eine Vereinbarung δ_i^n mit $U_i(\delta_i^n) < U_i(\delta')$ vorschlägt, d.h. dass $U_i(\delta_i^n) < U_i(\delta')$ und $U_i(\delta_i^{n-1}) \geq U_i(\delta')$. Wegen der Monotonie gilt $\pi(\delta') > \pi(\delta_i^n) \geq \pi(\delta_i^{n-1})$. Da $\pi(\delta') > \pi(\delta_i^{n-1})$ und $U_i(\delta_i^{n-1}) \geq U_i(\delta')$, muss $U_j(\delta') > U_j(\delta_i^{n-1})$ ($j \neq i$) gelten, d.h. auch mit δ' statt δ_i^n käme Spieler i Spieler j in Schritt n entgegen, δ' wäre also eine gültige Wahl gewesen. Wegen $U_i(\delta_i^n) < U_i(\delta')$ hätte Spieler i im Widerspruch zum tatsächlichen Verlauf der Verhandlung also nicht δ_i^n, sondern δ' vorgeschlagen.

Somit maximiert die Vereinbarung δ^*, auf die sich die Spieler einigen, den Produktnutzen π. □

Erfüllt die Zeuthen-Strategie im monotonen Zugeständnisprotokoll die oben erwähnten wünschenswerten Eigenschaften von Verteilungsmechanismen? Effizienz, Verteiltheit, Symmetrie sowie zu einem gewissen Grad auch Einfachheit sind gegeben. Ist die Zeuthen-Strategie im monotonen Zugeständnisprotokoll aber auch stabil?

Satz 22. *Die Zeuthen-Strategie ist nicht stabil, d.h. ein Profil aus Zeuthen-Strategien ist im allgemeinen kein teilspielperfektes Gleichgewicht.*

Beweis. Es genügt, ein Beispiel anzugeben, in dem die Zeuthen-Strategie nicht stabil ist.

Betrachte dazu die Instanz der Postboten-Domäne mit einem Startknoten und einem Knoten a, der sich in Distanz 1 vom Depot befindet sowie die Begegnung $(\{a\}, \{a\})$ in dieser Domäne. Die Verhandlungsmenge besteht aus den Vereinbarungen $(\{a\}, \varnothing)$ und $(\varnothing, \{a\})$.

In der ersten Verhandlungsrunde schlägt Spieler 1 die Vereinbarung $\delta_1^0 = (\varnothing, \{a\})$ und Spieler 2 die Vereinbarung $\delta_2^0 = (\{a\}, \varnothing)$ vor. Damit ist $\mathit{Risiko}_1^0 = \mathit{Risiko}_2^0 = 1$.

Die Zeuthen-Strategie schreibt vor, dass $\delta_1^1 = (\{a\}, \varnothing)$ und $\delta_2^1 = (\varnothing, \{a\})$ sein müssen. Damit hat Spieler $i \in \{1, 2\}$ den erwarteten Nutzen 1, denn beide Spieler nehmen den Vorschlag des anderen an und es wird eine Münze geworfen, um zu bestimmen, welche Vereinbarung gewählt wird.

Würde jedoch etwa Spieler 1 von der Zeuthen-Strategie abweichen und im letzten Schritt in dem Wissen, dass Spieler 2 ein Zugeständnis machen wird, selbst kein Zugeständnis machen, d.h. $\delta_1^1 = \delta_1^0 = (\varnothing, \{a\})$ anbieten, so würden sich die beiden Spieler auf diesen Vorschlag einigen und es wäre $U_1(\delta_1^1) = 2 > 1$, die Abweichung wäre also für Spieler 1 profitabel. □

Um die Zeuthen-Strategie stabil zu machen, kann man den letzten Schritt des Verhandlungsprotokolls als strategisches Spiel (Falke oder Taube) betrachten, wobei δ_1 und δ_2 die Vorschläge des vorletzten Schritts sind. Dann erhält man

		Spieler 2: Beharren	Spieler 2: Zugeständnis
Spieler 1	Beharren	$0, 0$	$U_1(\delta_1), U_2(\delta_1)$
	Zugeständnis	$U_1(\delta_2), U_2(\delta_2)$	$\frac{U_1(\delta_2)+U_1(\delta_1)}{2}, \frac{U_2(\delta_2)+U_2(\delta_1)}{2}$

Beharren beide Spieler auf ihren früheren Vorschlägen, endet die Verhandlung mit der Konfliktvereinbarung und Nutzen 0 für beide Spieler. Macht genau einer ein Zugeständnis, einigen sie sich auf einen Vorschlag mit dem Nutzen des letzten Vorschlags des anderen Spielers, und machen beide ein Zugeständnis, wird wieder eine Münze geworfen bzw. werden die Nutzenwerte der beiden Vorschläge gemittelt.

Dieses Spiel hat ein gemischtes Nash-Gleichgewicht, das beide Spieler „gleichberechtigt“ behandelt. Dieses nehmen wir als letzten Schritt.

Definition 97 (Erweiterte Zeuthen-Strategie). Die **erweiterte Zeuthen-Strategie** ist die Zeuthen-Strategie, wobei der letzte Schritt eine gemischte Nash-Gleichgewichts-Strategie für das Falke-oder-Taube-Spiel ist.

Da man nur symmetrische Mechanismen haben möchte, sind die beiden reinen Nash-Gleichgewichte des Spiels hier keine Gleichgewichte. Absprachen sind in diesem Protokoll nicht erlaubt.

Satz 23. *Das erweiterte Zeuthen-Strategieprofil ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht im monotonen Zugeständnisprotokoll.*

Beweis. Im letzten Schritt herrscht nach Definition der Strategie immer ein Gleichgewicht. Für frühere Verhandlungsrunden muss gezeigt werden, dass alle möglichen Abweichungen von der erweiterten Zeuthen-Strategie nicht profitabel sind. Folgende Fälle sind in Runde t möglich:

1. Spieler i macht kein Zugeständnis, obwohl es von der erweiterten Zeuthen-Strategie gefordert wird. Ist $Risiko_i^t < Risiko_j^t$, so endet die Verhandlung in der Konfliktvereinbarung, d.h. Spieler i erhöht seinen Nutzen dadurch nicht. Ist $Risiko_i^t = Risiko_j^t$, so wird das Zugeständnis von Spieler i nur in die nächste Runde verschoben oder die nächste Runde endet in der Konfliktvereinbarung.
2. Spieler i macht ein Zugeständnis, obwohl die erweiterte Zeuthen-Strategie dies nicht fordert. Dadurch kann er möglicherweise einen geringeren Nutzen bekommen, aber auf keinen Fall einen höheren.
3. Spieler i macht, wie von der erweiterten Zeuthen-Strategie gefordert, ein Zugeständnis, jedoch ein stärkeres als notwendig wäre. Auch hier kann er sich nicht verbessern.
4. Spieler i macht ein kleineres Zugeständnis als gefordert. Dann folgt ein weiteres Zugeständnis oder ein Konflikt im nächsten Schritt. Also ebenfalls keine Verbesserung.

Damit ist klar, dass sich Abweichungen an keinem Punkt lohnen und somit die erweiterte Zeuthen-Strategie eine teilspielperfekte Strategie ist. □

Von den wünschenswerten Eigenschaften von Verhandlungsmechanismen erfüllt das monotone Zugeständnisprotokoll mit der erweiterten Zeuthen-Strategie die Forderungen nach Stabilität, Verteiltheit und Symmetrie. Die Einfachheit ist nur eingeschränkt erfüllt, weil man alle u.U. exponentiell vielen Elemente der Verhandlungsmenge kennen muss. Pareto-Optimalität liegt nicht vor, da das Verfahren wegen des gemischten Nash-Gleichgewichtes im letzten Schritt auch in der Konfliktvereinbarung enden kann, selbst wenn eine bessere Vereinbarung möglich wäre.

Ein-Schritt-Protokoll

Ein alternativer Ansatz, der das Verfahren abkürzt, besteht darin, dass beide Spieler jeweils nur einen Vorschlag machen dürfen und das Angebot mit dem höheren Produkt der Nutzenwerte angenommen wird. Falls Gleichheit herrscht, wird eine Münze geworfen. Eine zu diesem Protokoll passende Strategie ist es, eine Vereinbarung mit maximalem eigenen Nutzen unter den Vereinbarungen vorzuschlagen, die das Produkt der Nutzenwerte maximieren. Dies ist eine TPG-Strategie, d.h. der Verhandlungsmechanismus ist stabil.

Diese Idee führt zu der folgenden verallgemeinernden Definition:

Definition 98 (Produktmaximierender Mechanismus). Ein **produktmaximierender Mechanismus** ist eine solche Kombination aus einem Verhandlungsprotokoll und einer dazu passenden Strategie, dass das Protokoll symmetrisch ist, die Strategie mit sich selbst ein Gleichgewicht bildet und der Produktnutzen maximiert wird. Gibt es mehrere Vereinbarungen, die den Produktnutzen maximieren, muss das Verhandlungsergebnis unter diesen Vereinbarungen zusätzlich die Summe der Nutzenwerte maximieren. Gibt es auch mehrere summenmaximierende unter den produktmaximierenden Vereinbarungen, so kann das Protokoll zufällig aus diesen auswählen. Keiner der Spieler darf einen negativen Nutzen erhalten.

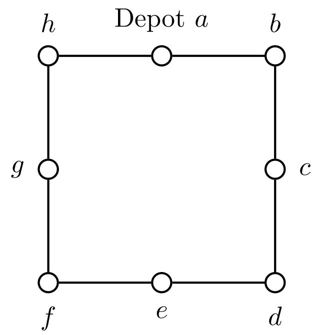
Ein produktmaximierender Mechanismus hat immer eine Pareto-optimale und individuell rationale Vereinbarung als Ergebnis.

7.2.4 Betrugsverhindernde Protokolle

Unter Umständen sind nicht alle Informationen bekannt, insbesondere kann Unklarheit über die Aufgaben der anderen Spieler bestehen. Deshalb macht am Anfang jeder Spieler seine Aufgaben öffentlich bekannt. Diese Bekanntgabe macht aber eine strategische Endscheidung erforderlich: Soll man alle Aufgaben bekannt machen? Soll man neue Aufgaben dazuerfinden?

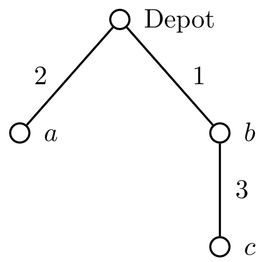
Im Weiteren wird angenommen, dass öffentliche Verpflichtungen eingehalten werden und die Agenten sich regelkonform verhalten, es aber private Entscheidungen und private Aufgaben geben kann.

Beispiel 99 (Vorteil durch verborgene Aufgaben). Betrachte die folgende Begegnung in der Postboten-Domäne mit Kantenlängen 1:



Es sind $T_1 = \{ b, f \}$ und $T_2 = \{ e \}$, d.h. $c(T_1) = c(T_2) = 8$. Die einzigen Pareto-optimalen und individuell rationalen Lösungen sind $(\{ b, f, e \}, \varnothing)$ und $(\varnothing, \{ b, f, e \})$. Da zwischen den beiden Vereinbarungen immer ein Münzwurf entscheiden muss, ist der erwartete Nutzen beider Spieler $\frac{1}{2}(8 + 0) = 4$. Verschweigt nun Spieler 1 die Aufgabe b, so befinden sich die Spieler aus Sicht von Spieler 2 ist der Begegnung $(\{ f \}, \{ e \})$. Die einzige Lösung dieser Begegnung ist $(\varnothing, \{ f, e \})$. Spieler 1 muss zwar seine verborgene Aufgabe ausführen, was ihm Kosten 2 verursacht (und damit Nutzen $8 - 2 = 6$ bringt), aber für ihn besser ist als der Fall, dass er die Aufgabe b nicht verschweigt und einen erwarteten Nutzen von 4 hat. Während also Lügen gut für das Individuum ist, ist es schlecht für die Gesellschaft bzw. den Gesamtnutzen, der um 2 vermindert wird.

Beispiel 100 (Vorteil durch vorgetäuschte Aufgaben). Betrachte die folgende Begegnung in der Postboten-Domäne:



Dabei sind $T_1 = T_2 = \{ a, b \}$ und $c(T_1) = c(T_2) = 6$. Behauptet nun Spieler 1, er müsse auch Knoten c besuchen, ergibt sich die scheinbare Begegnung (T_1', T_2) mit $T_1' = \{ a, b, c \}$ und $c(T_1') = 12$.

1. echte Begegnung (T_1, T_2): mögliche Vereinbarungen sind hier $\delta_1 = (\{ a, b \}, \varnothing)$, $\delta_2 = (\{ a \}, \{ b \})$, $\delta_3 = (\{ b \}, \{ a \})$ und $\delta_4 = (\varnothing, \{ a, b \})$. Davon sind δ_1 und δ_4 nicht produktmaximierend. Der Vorschlag von Agent 1 ist δ_3, der von Agent 2 ist δ_2. Damit ergibt sich für beide Agenten ein erwarteter Nutzen von 3.
2. scheinbare Begegnung (T_1', T_2): die einzige produktmaximierende, Pareto-optimale und individuell rationale Aufteilung der Aufgaben ist $\delta_1' = (\{ b, c \}, \{ a \})$. Die Agenten müssen sich also auf die diese Vereinbarung einigen. Der behauptete und tatsächliche Nutzen von Agent 1 ist damit $U_1(\delta_1') = 4$, der von Agent 2 beträgt $U_2(\delta_1') = 2$.

Wegen $U_1(\delta_1') = 4 > 3$, dem erwarteten Nutzen in der echten Begegnung, ist die Strategie, die Wahrheit zu sagen, keine Gleichgewichtsstrategie.

7.2.5 Gemischte Vereinbarungen

Um den Raum der möglichen Vereinbarungen zu vergrößern und um manche Betrugsversuche unmöglich zu machen, kann man auch solche Vereinbarungen zulassen, bei denen zuerst die Aufgaben aufgeteilt werden und danach durch einen Münzwurf entschieden wird, welcher Spieler welchen Teil der Aufgaben übernimmt. Wir lassen also auch gemischte (randomisierte) Vereinbarungen zu.

Definition 101 (Gemischte Vereinbarung). Sei (T_1, T_2) eine Begegnung in einer Task-orientierten Domäne $\langle T, \{1, 2\}, c \rangle$. Dann heißt $(D_1, D_2) : p$ mit $D_1 \cup D_2 = T_1 \cup T_2$ und $0 \leq p \leq 1$ eine **gemischte Vereinbarung**. Dabei wird mit Wahrscheinlichkeit p die Aufgabenmenge D_1 Spieler 1 und die Menge D_2 Spieler 2 zugewiesen. Mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ erhält Spieler 1 die Aufgaben aus D_2 und Spieler 2 die aus D_1. Die erwarteten Kosten für Spieler k betragen

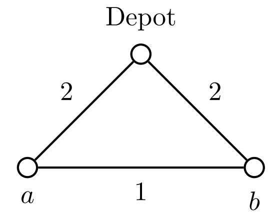
$$C_k((D_1, D_2) : p) = c(D_k) \cdot p + c(D_{3-k}) \cdot (1 - p),$$

der erwartete Nutzen

$$U_k((D_1, D_2) : p) = c(T_k) - C_k((D_1, D_2) : p).$$

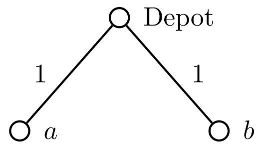
Damit wird eine größere Verhandlungsmenge möglich.

Beispiel 102. Betrachte folgende Begegnung in der Logistik-Domäne:



Dabei sind $T_1 = \{ a \}$ und $T_2 = \{ b \}$. Die einzigen Pareto-optimalen und individuell rationalen reinen Vereinbarungen sind $(\{ a \}, \{ b \})$ und $(\{ b \}, \{ a \})$, die beiden Spieler Nutzen 0 bringen. Dagegen bringt die gemischte Vereinbarung $(\{ a, b \}, \emptyset) : 0{,}5$ beiden Spielern erwartete Kosten $C_k((\{ a, b \}, \emptyset) : 0{,}5) = 3 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$ bzw. einen erwarteten Nutzen $U_k((\{ a, b \}, \emptyset) : 0{,}5) = 2 - 1{,}5 = 0{,}5$.

Beispiel 103. Es gibt Begegnungen, in denen gemischte Vereinbarungen keinen höheren Nutzen als reine Vereinbarungen bringen. Betrachte dazu die Begegnung $(\{ a \}, \{ b \})$ in der Logistik-Domäne mit dem folgenden Graphen:



Hier ist $C_1(\{ a \}, \{ b \}) = C_2(\{ a \}, \{ b \}) = 1$. Die einzigen gemischten Vereinbarungen, die sich wesentlich von $(\{ a \}, \{ b \})$ und $(\{ b \}, \{ a \})$ unterscheiden, haben die Form $(\{ a, b \}, \emptyset) : p$ mit $0 \leq p \leq 1$. Für diese Vereinbarungen gilt aber $C_1((\{ a, b \}, \emptyset) : p) = 3p + 0(1 - p) = 3p$ und $C_2((\{ a, b \}, \emptyset) : p) = 0p + 3(1 - p) = 3 - 3p$, d.h. für jedes p mit $0 \leq p \leq 1$ gibt es einen Spieler k, für den $(\{ a, b \}, \emptyset) : p$ schlechter als die Konfliktvereinbarung ist. Für $p = \frac{1}{2}$ haben sogar beide Spieler höhere erwartete Kosten (1,5) als in der Konfliktvereinbarung.

Definition 104 (Subadditive Domäne). Eine **subadditive Domäne** hat die Eigenschaft, dass für alle $X, Y \subseteq T$ gilt: $c(X \cup Y) \leq c(X) + c(Y)$.

In subadditiven Domänen ist oftmals Kooperation sinnvoll, denn das Zusammenlegen von Aufgaben ist – anders als in Beispiel 103 – nie mit höheren Kosten verbunden als deren getrennte Ausführung.

Beispiel 105. Die Logistik-Domäne ist nicht subadditiv, während die Postboten-Domäne subadditiv ist.

Definition 106 (Alles-oder-Nichts-Vereinbarung). Eine **Alles-oder-Nichts-Vereinbarung** für eine Begegnung (T_1, T_2) ist eine gemischte Vereinbarung der Form $(T_1 \cup T_2, \emptyset) : p$ mit $0 \leq p \leq 1$.

Satz 24. *In subadditiven Domänen sind einige Alles-oder-Nichts-Vereinbarungen PMM-Lösungen.*

Beweis. In subadditiven Domänen minimieren Alles-oder-Nichts-Vereinbarungen die Summe der erwarteten Kosten. Sie maximieren also die Summe der Nutzenwerte. Ist $n \in \mathbb{R}^+$ gegeben und sucht man eine Aufteilung $n = k + j$ mit $j, k \in \mathbb{R}^+$ so, dass kj maximiert wird, so erfüllt $k = j = \frac{n}{2}$ diese Anforderung. Wähle also p so, dass für $\delta = (T_1 \cup T_2, \varnothing) : p$ gilt: $U_1(\delta) = U_2(\delta)$. Dann wird das Produkt $U_1(\delta) \cdot U_2(\delta)$ maximal, d.h. δ ist eine PMM-Lösung. □

Satz 25. *In subadditiven Domänen sind Vortäuschungen nicht sicher, d.h. für jede Begegnung und jeden produktmaximierenden Mechanismus über gemischten Vereinbarungen gibt es eine strikt positive Wahrscheinlichkeit, dass die Vortäuschung entdeckt wird.*

Beweis. Da es Alles-oder-Nichts-Vereinbarungen gibt, die PMM-Lösungen sind, kann der falsche Spieler die vorgetäuschte Aufgabe zugewiesen bekommen. □

Satz 26. *Für jede Begegnung in einer Task-orientierten Domäne ist die Verhandlungsmenge über gemischten Vereinbarungen nicht-leer.*

Beweis. Sei (T_1, T_2) eine Begegnung. Es ist zu zeigen, dass es eine individuell rationale und Pareto-optimale gemischte Vereinbarung gibt. Eine reine Vereinbarung erfüllt die **Minimum-Bedingung**, falls

$$\min_{i \in \{1,2\}} c(T_i) \geq \min_{i \in \{1,2\}} c(D_i)$$

und die **Summen-Bedingung**, falls

$$\sum_{i=1}^{2} c(T_i) \geq \sum_{i=1}^{2} c(D_i).$$

Es gilt bereits für alle individuell rationalen gemischten Vereinbarungen $(D_1, D_2) : p$, dass (D_1, D_2) beide Bedingungen erfüllt: da für $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} c(T_i) &\geq C_i((D_1, D_2) : p) \\ &= c(D_i) \cdot p + c(D_{3-i}) \cdot (1 - p) \\ &\geq \min_{\ell \in \{1,2\}} c(D_\ell) \end{aligned} \tag{7.1}$$

muss die Minimum-Bedingung erfüllt sein. Summiert man über 7.1 auf, erhält man, dass auch die Summen-Bedingung erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} c(T_i) &\geq c(D_1) \cdot p + c(D_2) \cdot (1 - p) \\ &\qquad + c(D_2) \cdot p + c(D_1) \cdot (1 - p) \\ &= c(D_1) + c(D_2) \end{aligned}$$

Konstruiere nun eine Vereinbarung: wähle dazu unter den reinen Vereinbarungen, die die Minimum- und Summen-Bedingungen erfüllen, ein Paar (D_1^*, D_2^*) mit minimalen Gesamtkosten, d.h. so, dass

$$c(D_1^*) + c(D_2^*) = \min\{\, c(D_1) + c(D_2) \mid D_1, D_2 \text{ erfüllen Minimum- und Summen-Bedingung} \,\}.$$

Da die Konfliktvereinbarung die Minimum- und Summen-Bedingungen erfüllt und es nur endlich viele reine Vereinbarungen gibt, existiert ein solches Paar. Betrachte nun die folgenden Fälle:

Fall 1: $c(T_i) \geq c(D_i^*)$ für $i = 1, 2$, d.h. $(D_1^*, D_2^*) : 1$ ist individuell rational.
Fall 2: $c(T_i) \leq c(D_i^*)$ für genau ein i, o.B.d.A. $i = 1$. Dann ist $(D_1^*, D_2^*) : p$ mit

$$p = 1 - \frac{c(T_1) - c(D_1^*)}{c(D_2^*) - c(D_1^*)}$$

individuell rational.

Nun kann man zeigen, dass $(D_1^*, D_2^*) : p$ Pareto-optimal unter den individuell rationalen Vereinbarungen ist. Denn angenommen, $(D_1', D_2') : q$ dominiert $(D_1^*, D_2^*) : p$. Da $(D_1', D_2') : q$ individuell rational ist, muss (D_1', D_2') die Minimum- und die Summen-Bedingung erfüllen. Außerdem gilt, da $(D_1', D_2') : q$ dominiert:

$$\sum_{i=1}^{2} U_i((D_1', D_2') : q) > \sum_{i=1}^{2} U_i((D_1^*, D_2^*) : p)$$

Dann folgt:

$$\sum_{i=1}^{2} c(D_i') < \sum_{i=1}^{2} c(D_i^*)$$

verletzt die Bedingung der minimalen Kosten. □

Literaturverzeichnis

[Bin92] Binmore, Ken: *Fun and Games.* D. C. Heath and Co., Lexington, MA, 1992.

[CS03] Conitzer, Vincent und Tuomas Sandholm: *Complexity Results about Nash Equilibria.* In: Gottlob, Georg und Toby Walsh (Herausgeber): *Proceedings of the Eighteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), Acapulco, Mexico*, Seiten 765–771. Morgan Kaufmann, 2003.

[FT91] Fudenberg, Drew und Jean Tirole: *Game Theory.* MIT Press, Cambridge, MA, 1991.

[Heu04] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis*, Band 2. Teubner, Stuttgart, dreizehnte Auflage, 2004.

[HI02] Holler, Manfred J. und Gerhard Illing: *Einführung in die Spieltheorie.* Springer-Verlag, Berlin, fünfte Auflage, 2002.

[OR94] Osborne, Martin J. und Ariel Rubinstein: *A Course in Game Theory.* MIT Press, Cambridge, MA, 1994.

[RZ94] Rosenschein, Jeffrey S. und Gilad Zlotkin: *Rules of Encounter.* MIT Press, Cambridge, MA, 1994.

[vS02] von Stengel, Bernhard: *Computing Equilibria for Two-Person Games.* In: Aumann, Robert J. und Sergiu Hart (Herausgeber): *Handbook of Game Theory*, Band 3, Seiten 1723–1759. North-Holland, Amsterdam, 2002.

Index