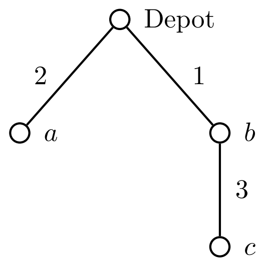
Beispiel 100 (Vorteil durch vorgetäuschte Aufgaben). Betrachte die folgende Begegnung in der Postboten-Domäne:



Dabei sind $T_1 = T_2 = \{a, b\}$ und $c(T_1) = c(T_2) = 6$. Behauptet nun Spieler 1, er müsse auch Knoten c besuchen, ergibt sich die scheinbare Begegnung (T_1', T_2) mit $T_1' = \{a, b, c\}$ und $c(T_1') = 12$.

1. echte Begegnung (T_1, T_2): mögliche Vereinbarungen sind hier $\delta_1 = (\{a, b\}, \varnothing)$, $\delta_2 = (\{a\}, \{b\})$, $\delta_3 = (\{b\}, \{a\})$ und $\delta_4 = (\varnothing, \{a, b\})$. Davon sind δ_1 und δ_4 nicht produktmaximierend. Der Vorschlag von Agent 1 ist δ_3, der von Agent 2 ist δ_2. Damit ergibt sich für beide Agenten ein erwarteter Nutzen von 3.
2. scheinbare Begegnung (T_1', T_2): die einzige produktmaximierende, Pareto-optimale und individuell rationale Aufteilung der Aufgaben ist $\delta_1' = (\{b, c\}, \{a\})$. Die Agenten müssen sich also auf die diese Vereinbarung einigen. Der behauptete und tatsächliche Nutzen von Agent 1 ist damit $U_1(\delta_1') = 4$, der von Agent 2 beträgt $U_2(\delta_1') = 2$.

Wegen $U_1(\delta_1') = 4 > 3$, dem erwarteten Nutzen in der echten Begegnung, ist die Strategie, die Wahrheit zu sagen, keine Gleichgewichtsstrategie.

7.2.5 Gemischte Vereinbarungen

Um den Raum der möglichen Vereinbarungen zu vergrößern und um manche Betrugsversuche unmöglich zu machen, kann man auch solche Vereinbarungen zulassen, bei denen zuerst die Aufgaben aufgeteilt werden und danach durch einen Münzwurf entschieden wird, welcher Spieler welchen Teil der Aufgaben übernimmt. Wir lassen also auch gemischte (randomisierte) Vereinbarungen zu.

Definition 101 (Gemischte Vereinbarung). Sei (T_1, T_2) eine Begegnung in einer Task-orientierten Domäne $\langle T, \{1, 2\}, c\rangle$. Dann heißt $(D_1, D_2) : p$ mit $D_1 \cup D_2 = T_1 \cup T_2$ und $0 \le p \le 1$ eine **gemischte Vereinbarung**. Dabei wird mit Wahrscheinlichkeit p die Aufgabenmenge D_1 Spieler 1 und die Menge D_2 Spieler 2 zugewiesen. Mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ erhält Spieler 1 die Aufgaben aus D_2 und Spieler 2 die aus D_1. Die erwarteten Kosten für Spieler k betragen

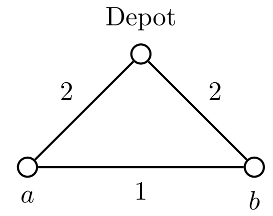
$$C_k((D_1, D_2) : p) = c(D_k) \cdot p + c(D_{3-k}) \cdot (1 - p),$$

der erwartete Nutzen

$$U_k((D_1, D_2) : p) = c(T_k) - C_k((D_1, D_2) : p).$$

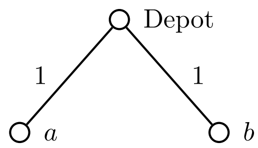
Damit wird eine größere Verhandlungsmenge möglich.

Beispiel 102. Betrachte folgende Begegnung in der Logistik-Domäne:



Dabei sind $T_1 = \{ a \}$ und $T_2 = \{ b \}$. Die einzigen Pareto-optimalen und individuell rationalen reinen Vereinbarungen sind $(\{ a \}, \{ b \})$ und $(\{ b \}, \{ a \})$, die beiden Spieler Nutzen 0 bringen. Dagegen bringt die gemischte Vereinbarung $(\{ a, b \}, \varnothing) : 0{,}5$ beiden Spielern erwartete Kosten $C_k((\{ a, b \}, \varnothing) : 0{,}5) = 3 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$ bzw. einen erwarteten Nutzen $U_k((\{ a, b \}, \varnothing) : 0{,}5) = 2 - 1{,}5 = 0{,}5$.

Beispiel 103. Es gibt Begegnungen, in denen gemischte Vereinbarungen keinen höheren Nutzen als reine Vereinbarungen bringen. Betrachte dazu die Begegnung $(\{ a \}, \{ b \})$ in der Logistik-Domäne mit dem folgenden Graphen:



Hier ist $C_1(\{ a \}, \{ b \}) = C_2(\{ a \}, \{ b \}) = 1$. Die einzigen gemischten Vereinbarungen, die sich wesentlich von $(\{ a \}, \{ b \})$ und $(\{ b \}, \{ a \})$ unterscheiden, haben die Form $(\{ a, b \}, \varnothing) : p$ mit $0 \leq p \leq 1$. Für diese Vereinbarungen gilt aber $C_1((\{ a, b \}, \varnothing) : p) = 3p + 0(1 - p) = 3p$ und $C_2((\{ a, b \}, \varnothing) : p) = 0p + 3(1 - p) = 3 - 3p$, d.h. für jedes p mit $0 \leq p \leq 1$ gibt es einen Spieler k, für den $(\{ a, b \}, \varnothing) : p$ schlechter als die Konfliktvereinbarung ist. Für $p = \frac{1}{2}$ haben sogar beide Spieler höhere erwartete Kosten (1,5) als in der Konfliktvereinbarung.

Definition 104 (Subadditive Domäne). Eine **subadditive Domäne** hat die Eigenschaft, dass für alle $X, Y \subseteq T$ gilt: $c(X \cup Y) \leq c(X) + c(Y)$.

In subadditiven Domänen ist oftmals Kooperation sinnvoll, denn das Zusammenlegen von Aufgaben ist – anders als in Beispiel 103 – nie mit höheren Kosten verbunden als deren getrennte Ausführung.

Beispiel 105. Die Logistik-Domäne ist nicht subadditiv, während die Postboten-Domäne subadditiv ist.

Definition 106 (Alles-oder-Nichts-Vereinbarung). Eine **Alles-oder-Nichts-Vereinbarung** für eine Begegnung (T_1, T_2) ist eine gemischte Vereinbarung der Form $(T_1 \cup T_2, \varnothing) : p$ mit $0 \leq p \leq 1$.

Satz 24. *In subadditiven Domänen sind einige Alles-oder-Nichts-Vereinbarungen PMM-Lösungen.*

Beweis. In subadditiven Domänen minimieren Alles-oder-Nichts-Vereinbarungen die Summe der erwarteten Kosten. Sie maximieren also die Summe der Nutzenwerte. Ist $n \in \mathbb{R}^+$ gegeben und sucht man eine Aufteilung $n = k + j$ mit $j, k \in \mathbb{R}^+$ so, dass kj maximiert wird, so erfüllt $k = j = \frac{n}{2}$ diese Anforderung. Wähle also p so, dass für $\delta = (T_1 \cup T_2, \varnothing) : p$ gilt: $U_1(\delta) = U_2(\delta)$. Dann wird das Produkt $U_1(\delta) \cdot U_2(\delta)$ maximal, d.h. δ ist eine PMM-Lösung. □

Satz 25. *In subadditiven Domänen sind Vortäuschungen nicht sicher, d.h. für jede Begegnung und jeden produktmaximierenden Mechanismus über gemischten Vereinbarungen gibt es eine strikt positive Wahrscheinlichkeit, dass die Vortäuschung entdeckt wird.*

Beweis. Da es Alles-oder-Nichts-Vereinbarungen gibt, die PMM-Lösungen sind, kann der falsche Spieler die vorgetäuschte Aufgabe zugewiesen bekommen. □

Satz 26. *Für jede Begegnung in einer Task-orientierten Domäne ist die Verhandlungsmenge über gemischten Vereinbarungen nicht-leer.*

Beweis. Sei (T_1, T_2) eine Begegnung. Es ist zu zeigen, dass es eine individuell rationale und Pareto-optimale gemischte Vereinbarung gibt. Eine reine Vereinbarung erfüllt die **Minimum-Bedingung**, falls

$$\min_{i \in \{1,2\}} c(T_i) \geq \min_{i \in \{1,2\}} c(D_i)$$

und die **Summen-Bedingung**, falls

$$\sum_{i=1}^{2} c(T_i) \geq \sum_{i=1}^{2} c(D_i).$$

Es gilt bereits für alle individuell rationalen gemischten Vereinbarungen $(D_1, D_2) : p$, dass (D_1, D_2) beide Bedingungen erfüllt: da für $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} c(T_i) &\geq C_i((D_1, D_2) : p) \\ &= c(D_i) \cdot p + c(D_{3-i}) \cdot (1 - p) \\ &\geq \min_{\ell \in \{1,2\}} c(D_\ell) \end{aligned} \tag{7.1}$$

muss die Minimum-Bedingung erfüllt sein. Summiert man über 7.1 auf, erhält man, dass auch die Summen-Bedingung erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} c(T_i) &\geq c(D_1) \cdot p + c(D_2) \cdot (1 - p) \\ &\quad + c(D_2) \cdot p + c(D_1) \cdot (1 - p) \\ &= c(D_1) + c(D_2) \end{aligned}$$

Konstruiere nun eine Vereinbarung: wähle dazu unter den reinen Vereinbarungen, die die Minimum- und Summen-Bedingungen erfüllen, ein Paar (D_1^*, D_2^*) mit minimalen Gesamtkosten, d.h. so, dass

$$c(D_1^*) + c(D_2^*) = \min\{\, c(D_1) + c(D_2) \mid D_1, D_2 \text{ erfüllen Minimum- und Summen-Bedingung} \,\}.$$