mit ungeradem $t$ oder die leere Historie ist. $P(h) = 2$, falls $h$ von Typ I oder Typ II und $t$ gerade ist. Statt Auszahlungsfunktionen $(u_i)_{i \in N}$ verwenden wir **Präferenzrelationen**, d.h. reflexive und transitive Relationen, $(\preceq_i)_{i \in N}$. Neben der Reflexivität und Transitivität wollen wir einige weitere Anforderungen an die Relationen $\preceq_i$ stellen. Wir nehmen an, dass der Weg zu einer Vereinbarung für deren Bewertung unerheblich ist, und partitionieren die terminalen Historien entsprechend in Äquivalenzklassen: die Historien von Typ IV bilden die Äquivalenzklasse $D$, die Konfliktvereinbarung, d.h. das Ergebnis bei einem Scheitern der Verhandlung. Die Historien von Typ III werden in Klassen $(x, t) \in X \times T$ eingeteilt, wobei eine Klasse $(x, t)$ alle Historien der Form $\langle x^0, R, x^1, \ldots, R, x^t, A\rangle$ mit $x = x^t$ umfasst. Die Präferenzrelation $\preceq_i$ von Spieler $i$ ist nun über der Menge $(X \times T) \cup \{ D \}$ der Äquivalenzklassen von Historien definiert. Sie muss folgende Bedingungen erfüllen:

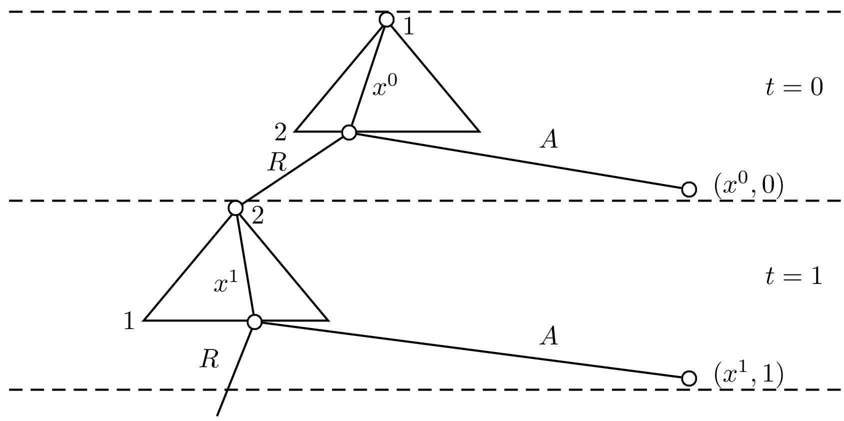
- alles ist mindestens so gut wie das Scheitern der Verhandlung, d.h. $(x, t) \succeq_i D$ für alle $(x, t) \in X \times T$,
- Zeit ist wertvoll, d.h. $(x, t) \succeq_i (x, t+1)$ für alle $(x, t) \in X \times T$ mit der strikten Präferenz $(x, 0) \succ_i D$ für alle $x \in X$,
- Präferenz ist stationär, d.h. $(x, t) \succeq_i (y, t+1)$ gdw. $(x, 0) \succeq_i (y, 1)$ und $(x, t) \succeq_i (y, t)$ gdw. $(x, 0) \succeq_i (y, 0)$ für alle $x, y \in X$ und $t \in T$, und
- Präferenz ist stetig, d.h. falls $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y \in X$ sind und für zwei Zeitpunkte $s, t \in T$ gilt, dass $(x_n, t) \succeq_i (y_n, s)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $(x, t) \succeq_i (y, s)$.

**Lemma 16.** *Ist $\preceq_i$ eine Präferenzrelation, die die Eigenschaften aus Definition 72 besitzt, so kann $\preceq_i$ durch eine Auszahlungsfunktion $u_i$ repräsentiert werden, genauer: für jedes $\delta \in (0, 1)$ gibt es eine stetige Funktion $u_i : X \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $s, t \in T$:*

$$(x, t) \succeq_i (y, s) \text{ gdw. } \delta^t u_i(x) \geq \delta^s u_i(y).$$

*Beweis.* Ohne Beweis. ☐

Die ersten zwei Runden eines Verhandlungsspiels mit abwechselnden Vorschlägen können etwa wie folgt visualisiert werden:




**Beispiel 73 (Kuchenverteilspiel mit zwei Spielern).** Die Menge der möglichen Verhandlungsergebnisse ist $X = \{ (x_1, x_2) \mid x_i \geq 0 \text{ für } i \in \{1, 2\} \text{ und } x_1 + x_2 = 1 \}$. Für

die Präferenzrelationen gilt, dass $(x,t) \succeq (y,t)$ gdw. $x_i \geq y_i$ sowie $((0,1),0) \sim_1 D$ und $((1,0),0) \sim_2 D$. D.h. man kann $\preceq_i$ durch $\delta_i^t w_i(x_i)$ repräsentieren, wobei $0 < \delta_i < 1$, $w_i$ monoton wachsend und stetig sowie $w_i(0) = 0$ ist.

## 6.2 Teilspielperfekte Gleichgewichte

**Definition 74 (Pareto-Grenze).** Die **Pareto-Grenze** einer Menge von Vereinbarungen $X$ besteht aus den Elementen $x \in X$, für die es kein $y \in X$ mit $(y,0) \succ_i (x,0)$ für alle $i \in \{1,2\}$ gibt. Ein solches $x$ heißt **effiziente Vereinbarung**.

Zur Beschreibung der teilspielperfekten Gleichgewichte in Verhandlungsspielen mit abwechselnden Vorschlägen wollen wir zunächst einige zusätzliche Annahmen machen:

A1 Keine zwei verschiedenen Einigungen werden gleich bewertet, d.h. es gibt kein Paar $(x,y) \in X^2$ mit $x \neq y$ und $(x,0) \sim_i (y,0)$ für beide Spieler $i \in \{1,2\}$.

A2 Für $i,j \in \{1,2\}$ und $i \neq j$ gilt $(b^i,1) \sim_j (b^i,0) \sim_j D$, wobei $b^i$ die für $i$ beste Vereinbarung ist.

A3 Die Pareto-Grenze ist strikt monoton, d.h. für effiziente Vereinbarungen $x$ existiert keine Vereinbarung $y \neq x$ mit $(y,0) \succeq_i (x,0)$ für alle $i \in \{1,2\}$.

A4 Es existiert ein eindeutiges Paar $(x^*,y^*)$ von effizienten Vereinbarungen, für das gilt: $(x^*,1) \sim_1 (y^*,0)$ und $(y^*,1) \sim_2 (x^*,0)$.

**Satz 17.** *Ein Verhandlungsspiel mit abwechselnden Vorschlägen $(X,(\succeq_i)_{i\in N})$, das A1 bis A4 erfüllt, hat ein teilspielperfektes Gleichgewicht. Sei $(x^*,y^*)$ das Paar, für das gilt, dass $(x^*,1) \sim_1 (y^*,0)$ und $(y^*,1) \sim_2 (x^*,0)$. Dann*

1. *schlägt Spieler 1 in jedem teilspielperfekten Gleichgewicht $x^*$ vor, akzeptiert $y^*$ und jeden Vorschlag $y$ mit $(y,0) \succeq_1 (y^*,0)$ und weist jeden Vorschlag $y$ mit $(y,0) \prec_1 (y^*,0)$ zurück und*
2. *schlägt Spieler 2 in jedem teilspielperfekten Gleichgewicht $y^*$ vor, akzeptiert $x^*$ und jeden Vorschlag $x$ mit $(x,0) \succeq_2 (x^*,0)$ und weist jeden Vorschlag $x$ mit $(x,0) \prec_2 (x^*,0)$ zurück.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass das beschriebene Strategieprofil ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist. Da Verhandlungsspiele mit abwechselnden Vorschlägen die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft besitzen (ohne Beweis), genügt es zu prüfen, ob eine einschrittige Abweichung in einem Teilspiel zu einer Verbesserung führen kann. Wir untersuchen dies o.B.d.A. nur für Spieler 2. Betrachte eine Historie der Form $h = \langle x^0, R, \ldots, R, x^t \rangle$, nach der Spieler 2 am Zug ist. Akzeptiert er den Vorschlag, so ist der Ausgang $(x^t,t)$, weist er ihn zurück, ist der Ausgang $(y^*,t{+}1)$, weil Spieler 2 im nächsten Schritt $y^*$ vorschlägt und Spieler 1 diesen Vorschlag annimmt. Da die Präferenzrelation stationär ist, gilt $(x^t,t) \succeq_2 (y^*,t+1)$ genau dann, wenn $(x^t,0) \succeq_2 (y^*,1)$. Nach A4 gilt außerdem $(y^*,1) \sim_2 (x^*,0)$. Da Spieler 2 genau dann akzeptiert, wenn $(x^t,0) \succeq_2 (x^*,0)$, ist die Entscheidungsregel von Spieler 2 optimal und eine einschrittige Abweichung bringt keinen zusätzlichen Nutzen.

Betrachte nun eine Historie der Form $h = \langle x^0, R, \ldots, R, x^{t-1}, R \rangle$, nach der Spieler 2 am Zug ist. Macht er einen für ihn selbst schlechteren Vorschlag als $y^*$, d.h. ist $(x^t,0) \prec_2 (y^*,0)$, so ist sein Ergebnis schlechter als bei einem Vorschlag von $y^*$, wenn Spieler 1 den Vorschlag annimmt, und höchstens so gut wie bei einem Vorschlag von $y^*$, wenn Spieler 1 ablehnt, denn dann ist der Ausgang $(x^*, t+1) \sim_2 (y^*, t+2) \preceq_2 (y^*, t)$. Macht Spieler 2 einen für ihn selbst besseren Vorschlag als $y^*$, d.h. ist $(x^t, 0) \succ_2 (y^*, 0)$, lehnt Spieler 1 ab, weil $y^*$ effizient ist, und das Ergebnis ist wie oben $(x^*, t+1)$.

Wir müssen noch zeigen, dass das teilspielperfekte Gleichgewicht eindeutig ist. Da die Präferenzen stationär sind, sind alle Teilspiele $G_i$, in denen Spieler $i$ mit einem Vorschlag beginnt, identisch. Sei $\delta \in (0,1)$ und $u_i : X \to \mathbb{R}$ für $i \in \{1,2\}$ so, dass $\delta^t u_i(x)$ die Präferenzrelation $\succeq_i$ repräsentiert. Seien außerdem für $i \in \{1,2\}$:

$$\begin{aligned} M_i(G_i) &:= \sup\{\, \delta^t u_i(x) \mid \text{ex. ein TPG von } G_i \text{ mit dem Ergebnis } (x,t)\,\} \quad \text{und} \\ m_i(G_i) &:= \inf\{\, \delta^t u_i(x) \mid \text{ex. ein TPG von } G_i \text{ mit dem Ergebnis } (x,t)\,\}. \end{aligned}$$

In einem ersten Schritt zeigen wir, dass $M_1(G_1) = m_1(G_1) = u_1(x^*)$ und $M_2(G_2) = m_2(G_2) = u_2(y^*)$. Sei dazu $\varphi$ eine Funktion, die jeweils die Paare der Pareto-Grenze beschreibt, d.h. die $\varphi(u_1(x)) = u_2(x)$ für alle effizienten $x \in X$ erfüllt. Da $X$ zusammenhängend und $\preceq_i$ eine stetige Relation ist, ist der Wertebereich von $\varphi$ ein Intervall, $\varphi$ ist stetig und wegen A3 ist $\varphi$ eine Bijektion und strikt monoton fallend.

Falls Spieler 1 den Vorschlag von Spieler 2 im Teilspiel $G_2$ zurückweist, bekommt Spieler 1 nicht mehr als $\delta M_1(G_1)$, d.h. Spieler 1 muss jeden Vorschlag, der ihm einen Nutzen von mehr als $\delta M_1(G_1)$ bringt, akzeptieren. Also bekommt Spieler 2 in jedem teilspielperfekten Gleichgewicht von $G_2$ nicht weniger als $\varphi(\delta M_1(G_1))$, d.h.

$$m_2(G_2) \geq \varphi(\delta M_1(G_1)) \tag{6.1}$$

In jedem teilspielperfekten Gleichgewicht von $G_1$ erhält Spieler 2 mindestens $\delta m_2(G_2)$, da er den ersten Vorschlag von Spieler 1 zurückweisen kann, d.h. Spieler 1 kann nicht mehr als $\varphi^{-1}(\delta m_2(G_2))$ erhalten, kurz

$$M_1(G_1) \leq \varphi^{-1}(\delta m_2(G_2)) \tag{6.2}$$

Damit und mit Ungleichung (6.1) erhalten wir, da $\varphi$ strikt monoton fallend ist, dass

$$M_1(G_1) \leq \varphi^{-1}(\delta\varphi(\delta M_1(G_1))) \tag{6.3}$$

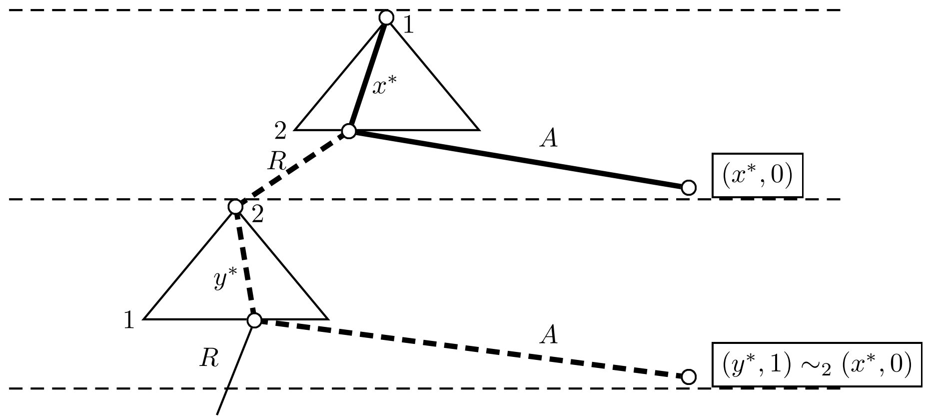
Da es ein teilspielperfektes Gleichgewicht von $G_1$ gibt, bei dem $x^*$ sofort akzeptiert wird, ist $M_1(G_1) \geq u_1(x^*)$. Also ist noch zu zeigen, dass auch $M_1(G_1) \leq u_1(x^*)$ gilt. Wegen A2 haben wir $\delta u_2(b^1) = u_2(b^1)$, d.h. $u_2(b^1) = 0$. Wegen A3 haben wir $\delta\varphi(\delta u_1(b^1)) > 0 = u_2(b^1) = \varphi(u_1(b^1))$. Da $\varphi$ strikt monoton fallend ist, folgt

$$u_1(b^1) > \varphi^{-1}(\delta\varphi(\delta u_1(b^1))). \tag{6.4}$$

Mit der Stetigkeit von $\varphi$ und Ungleichung (6.3) folgt daraus, dass es ein $U_1$ mit $M_1(G_1) \leq U_1 < u_1(b^1)$ und $U_1 = \varphi^{-1}(\delta\varphi(\delta U_1))$ gibt. Falls $M_1(G_1) > u_1(x^*)$, ist $U_1 \neq u_1(x^*)$. Konstruiere $a^*$ und $b^*$ als effiziente Vorschläge mit $u_1(a^*) = U_1$ und $u_1(b^*) = \delta u_1(a^*)$, d.h. $(a^*, 1) \sim_1 (b^*, 0)$. Außerdem gilt $u_2(b^*) = \varphi(\delta u_1(a^*)) = \varphi(\delta U_1)$ und $u_2(a^*) = \varphi(u_1(a^*)) = \varphi(U_1) = \varphi(\varphi^{-1}(\delta\varphi(\delta U_1))) = \delta\varphi(\delta U_1)$ und damit $\delta u_2(b^*) = u_2(a^*)$, also $(b^*, 1) \sim_2 (a^*, 0)$. Damit ist wegen $a^* \neq x^*$ die Eindeutigkeit von $(x^*, y^*)$ aus A4 verletzt, d.h. die Annahme $M_1(G_1) > u_1(x^*)$ muss falsch sein. Damit folgt $M_1(G_1) = u_1(x^*)$. Eine ähnliche Argumentation führt zu $m_1(G_1) = u_1(x^*)$, $M_2(G_2) = u_2(y^*)$ und $m_2(G_2) = u_2(y^*)$.

In jedem teilspielperfekten Gleichgewicht von $G_1$ schlägt Spieler 1 $x^*$ vor und Spieler 2 nimmt diesen Vorschlag an, denn der Nutzen von Spieler 1 beträgt nach der obigen Argumentation $u_1(x^*)$ und der Nutzen von Spieler 2 mindestens $\delta u_2(y^*) = u_2(x^*)$, da Spieler 2 den Vorschlag zurückweisen und dann den Nutzen $u_2(y^*)$ in $G_2$ erhalten könnte. Wegen A1 und der Effizienz von $x^*$ muss Spieler 1 $x^*$ vorschlagen und Spieler 2 akzeptieren.

Würde Spieler 2 ablehnen, dann selbst $y^*$ vorschlagen und Spieler 1 dies akzeptieren, hätte er zwar denselben Nutzen wie in dem Fall, dass er schon in der ersten Runde den Vorschlag $x^*$ akzeptiert, der Nutzen von Spieler 1 wäre jedoch geringer und die Strategien damit nicht im Gleichgewicht. Spieler 1 könnte profitabel abweichen, indem er gleich zu Beginn einen anderen Vorschlag macht.




In jedem teilspielperfekten Gleichgewicht akzeptiert Spieler 2 jeden Vorschlag $x$ mit $(x, 0) \succeq_2 (x^*, 0)$ und weist jeden Vorschlag $x$ mit $(x, 0) \prec_2 (x^*, 0)$ zurück, denn eine Ablehnung von Spieler 2 führt zu $G_2$ und damit zu Nutzen $u_2(y^*)$ für Spieler 2. Wegen $u_2(x^*) = \delta u_2(y^*)$ muss Spieler 2 jeden Vorschlag $x$ mit $(x, 0) \succeq_2 (x^*, 0)$ akzeptieren und jeden Vorschlag $x$ mit $(x, 0) \prec_2 (x^*, 0)$ zurückweisen. □