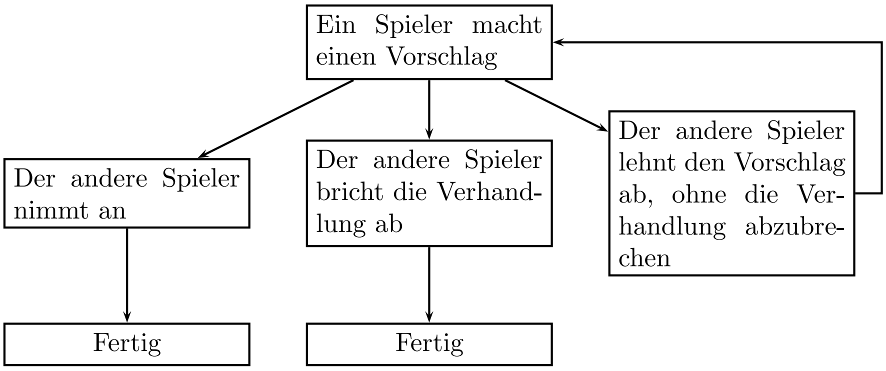
6 Verhandlungsspiele

Ein Verhandlungsspiel besitzt die allgemeine Struktur, dass ein Spieler einen Vorschlag macht und der andere Spieler den Vorschlag beantwortet, indem er die Verhandlung abbricht, den Vorschlag annimmt oder ihn ablehnt, ohne die Verhandlung abzubrechen, worauf einer der Spieler ein neues Angebot macht.



Häufig spielt die für die Verhandlung aufgewandte Zeit eine Rolle, d.h. später erlangter Nutzen ist weniger wert als früherer. Oft werden die Vorschläge abwechselnd gemacht.

6.1 Verhandlungsspiele mit abwechselnden Vorschlägen

Verhandlungsspiele mit abwechselnden Vorschlägen sind spezielle extensive Zwei-Personen-Spiele mit perfekter Information.

Definition 72 (Verhandlungsspiel mit abwechselnden Vorschlägen). Ein **Verhandlungsspiel mit abwechselnden Vorschlägen** ist ein extensives Spiel mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (\preceq_i)_{i \in N} \rangle$, wobei $N = \{1, 2\}$ ist und H mit Hilfe einer kompakten und zusammenhängenden Teilmenge X eines euklidischen Raums, der Menge $T = \mathbb{N}$ der Zeitpunkte sowie von zwei Aktionen R (Vorschlag ablehnen) und A (Vorschlag annehmen) wie folgt definiert ist: es gibt vier Typen von Historien, nämlich

- Typ I: die leere Historie $\langle\rangle$ und Historien der Form $\langle x^0, R, x^1, \ldots, x^t, R \rangle$ mit $t \in \mathbb{N}$ und $x^0, x^1, \ldots, x^t \in X$,
- Typ II: Historien der Form $\langle x^0, R, \ldots, R, x^t \rangle$ mit $t \in \mathbb{N}$ und $x^0, \ldots, x^t \in X$,
- Typ III: Historien der Form $\langle x^0, R, \ldots, R, x^t, A \rangle$ mit $t \in \mathbb{N}$ und $x^0, \ldots, x^t \in X$ und
- Typ IV: Historien der Form $\langle x^0, R, x_1, R, \ldots \rangle$ mit $x^0, x^1, \ldots \in X$.

Historien von Typ I und Typ II sind nichtterminale Historien, solche von Typ III und Typ IV sind terminale Historien. Es ist $P(h) = 1$, falls h eine Historie von Typ I oder Typ II mit ungeradem t oder die leere Historie ist. $P(h) = 2$, falls h von Typ I oder Typ II und t gerade ist. Statt Auszahlungsfunktionen $(u_i)_{i \in N}$ verwenden wir **Präferenzrelationen**, d.h. reflexive und transitive Relationen, $(\preceq_i)_{i \in N}$. Neben der Reflexivität und Transitivität wollen wir einige weitere Anforderungen an die Relationen $\preceq_i$ stellen. Wir nehmen an, dass der Weg zu einer Vereinbarung für deren Bewertung unerheblich ist, und partitionieren die terminalen Historien entsprechend in Äquivalenzklassen: die Historien von Typ IV bilden die Äquivalenzklasse D, die Konfliktvereinbarung, d.h. das Ergebnis bei einem Scheitern der Verhandlung. Die Historien von Typ III werden in Klassen $(x, t) \in X \times T$ eingeteilt, wobei eine Klasse (x, t) alle Historien der Form $\langle x^0, R, x^1, \dots, R, x^t, A \rangle$ mit $x = x^t$ umfasst. Die Präferenzrelation $\preceq_i$ von Spieler i ist nun über der Menge $(X \times T) \cup \{ D \}$ der Äquivalenzklassen von Historien definiert. Sie muss folgende Bedingungen erfüllen:

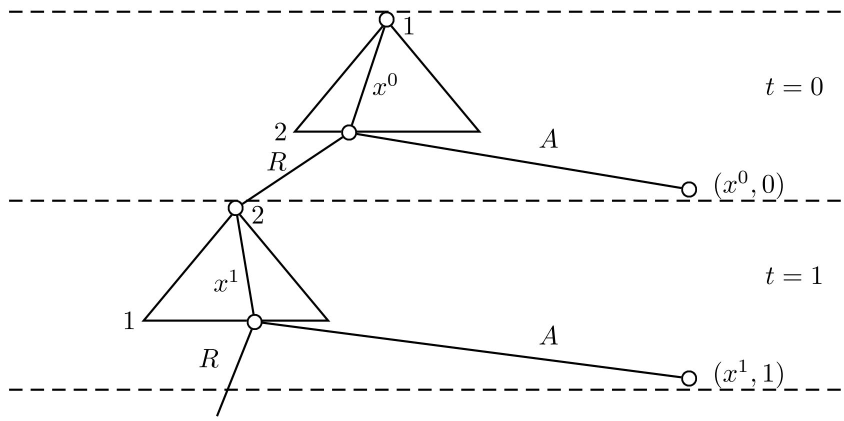
- alles ist mindestens so gut wie das Scheitern der Verhandlung, d.h. $(x, t) \succeq_i D$ für alle $(x, t) \in X \times T$,
- Zeit ist wertvoll, d.h. $(x, t) \succeq_i (x, t+1)$ für alle $(x, t) \in X \times T$ mit der strikten Präferenz $(x, 0) \succ_i D$ für alle $x \in X$,
- Präferenz ist stationär, d.h. $(x, t) \succeq_i (y, t+1)$ gdw. $(x, 0) \succeq_i (y, 1)$ und $(x, t) \succeq_i (y, t)$ gdw. $(x, 0) \succeq_i (y, 0)$ für alle $x, y \in X$ und $t \in T$, und
- Präferenz ist stetig, d.h. falls $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in X mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x \in X$ und $\lim_{n \to \infty} y_n = y \in X$ sind und für zwei Zeitpunkte $s, t \in T$ gilt, dass $(x_n, t) \succeq_i (y_n, s)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $(x, t) \succeq_i (y, s)$.

Lemma 16. *Ist $\preceq_i$ eine Präferenzrelation, die die Eigenschaften aus Definition 72 besitzt, so kann $\preceq_i$ durch eine Auszahlungsfunktion u_i repräsentiert werden, genauer: für jedes $\delta \in (0, 1)$ gibt es eine stetige Funktion $u_i : X \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $s, t \in T$:*

$$(x, t) \succeq_i (y, s) \text{ gdw. } \delta^t u_i(x) \geq \delta^s u_i(y).$$

Beweis. Ohne Beweis. □

Die ersten zwei Runden eines Verhandlungsspiels mit abwechselnden Vorschlägen können etwa wie folgt visualisiert werden:



Motivation 73. Wie können unabhängig entwickelte, eigennützige Agenten kooperieren? Sie können Verhandlungen über eine mögliche Zusammenarbeit führen.