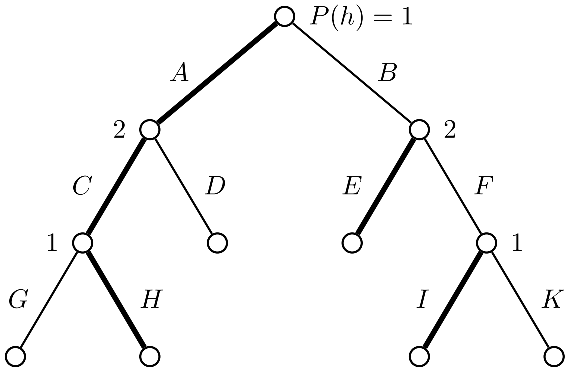
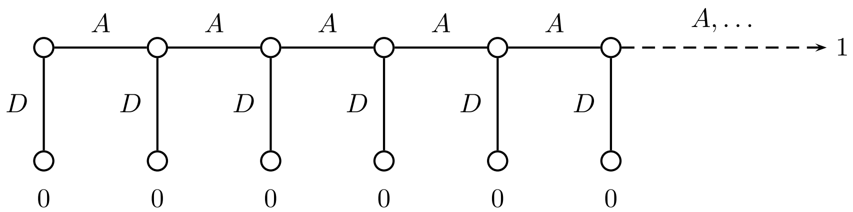


Will man zeigen, dass das Profil (AHI, CE) ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, so genügt es, für Spieler 1 die abweichenden Strategien G im Teilspiel $\Gamma(\langle A, C\rangle)$, K im Teilspiel $\Gamma(\langle B, F\rangle)$ und BHI in Γ sowie für Spieler 2 die abweichenden Strategien D im Teilspiel $\Gamma(\langle A\rangle)$ und F im Teilspiel $\Gamma(\langle B\rangle)$ zu betrachten. Insbesondere ist es z. B. nicht notwendig, die abweichende Strategie BGK von Spieler 1 in Γ auf Profitabilität zu untersuchen.

Bemerkung 63. Die entsprechende Aussage für Spiele ohne endlichen Horizont gilt nicht. Betrachte etwa das folgende Ein-Spieler-Spiel:



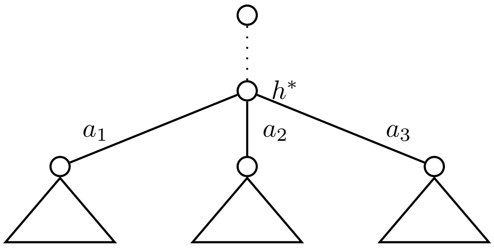
Die Strategie s_i mit $s_i(h) = D$ für alle $h \in H \setminus Z$ ist kein teilspielperfektes Gleichgewicht, da sie von der Strategie s_i^* mit $s_i^*(h) = A$ für alle $h \in H \setminus Z$ dominiert wird, erfüllt jedoch die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft, denn für jedes Teilspiel gilt, dass der Spieler keine bessere Auszahlung erhalten kann, wenn er nur den ersten Schritt ändert.

Definition 64. Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ein extensives Spiel mit perfekter Information und endlichem Horizont. Dann bezeichnet $\ell(\Gamma)$ die Länge der längsten Historie von Γ, d.h. $\ell(\Gamma) = \max\{\, |h| \mid h \in H \,\}$.

Satz 15 (Satz von Kuhn). *Jedes endliche extensive Spiel mit perfekter Information hat ein teilspielperfektes Gleichgewicht.*

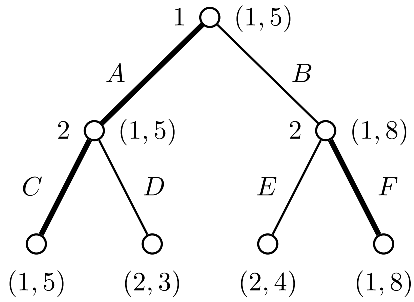
Beweis. Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ein endliches extensives Spiel mit perfekter Information. Konstruiere ein teilspielperfektes Gleichgewicht durch Induktion über die Länge $\ell(\Gamma(h))$ für alle Teilspiele $\Gamma(h)$. Konstruiere parallel dazu Funktionen $t_i : H \to \mathbb{R}$ für alle Spieler $i \in N$ so, dass $t_i(h)$ die Auszahlung für Spieler i in einem teilspielperfekten Gleichgewicht im Teilspiel $\Gamma(h)$ angibt.

Falls $\ell(\Gamma(h)) = 0$, dann ist $t_i(h) = u_i(h)$ für alle $i \in N$. Sei $t_i(h)$ für alle $h \in H$ mit $\ell(\Gamma(h)) \le k$ bereits definiert. Betrachte nun $h^* \in H$ mit $\ell(\Gamma(h^*)) = k + 1$ und $P(h^*) = i$.



Für alle $a \in A(h^*)$ ist $\ell(\Gamma(h^*, a)) \leq k$. Setze $s_i(h^*) := \operatorname{argmax}_{a \in A(h^*)} t_i(h^*, a)$ und $t_j(h^*) := t_j(h^*, s_i(h^*))$ für alle $j \in N$. Induktiv erhalten wir dabei ein Strategieprofil s, das die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft erfüllt. Mit dem vorigen Lemma 14 folgt, dass das s ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist. $\square$

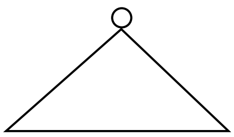
Beispiel 65. Betrachte den Spielbaum



Hier sind $s_2(\langle A \rangle) = C$, $t_1(\langle A \rangle) = 1$, $t_2(\langle A \rangle) = 5$, $s_2(\langle B \rangle) = F$, $t_1(\langle B \rangle) = 1$, $t_2(\langle B \rangle) = 8$ sowie etwa $s_2(\langle \rangle) = A$, $t_1(\langle \rangle) = 1$ und $t_2(\langle \rangle) = 5$.

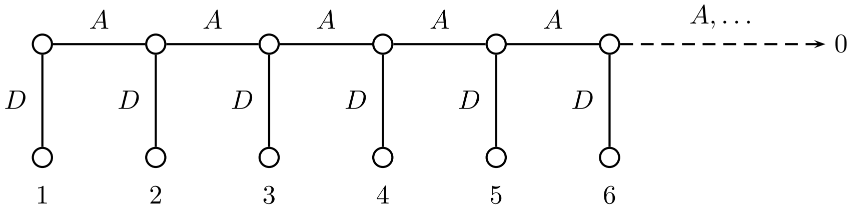
Bemerkung 66. Die entsprechende Aussage gilt nicht für unendliche Spiele.

1. Das folgende Ein-Personen-Spiel besitzt einen endlichen Horizont, aber einen unendlichen Verzweigungsgrad, nämlich unendlich viele Aktionen $a \in A = [0, 1)$ mit Auszahlungen $u_1(\langle a \rangle) = a$ für alle $a \in A$. Es besitzt kein teilspielperfektes Gleichgewicht.



Intervall $[0, 1)$

2. Auch bei unendlichem Horizont, aber endlichem Verzweigungsgrad muss kein teilspielperfektes Gleichgewicht existieren, wie das folgende Beispiel zeigt, wo u_i die Anzahl der gemachten Schritte ist, d.h. $u_1(AAA\dots) = 0$ und $u_1(\underbrace{AA\dots A}_{n} D) = n + 1$.



Beachte außerdem, dass der Satz von Kuhn nichts über die Eindeutigkeit teilspielperfekter Gleichgewichte aussagt. Falls keine zwei Historien von einem Spieler gleich bewertet werden, dann ist das TPG jedoch eindeutig.

5.5 Zwei Erweiterungen

5.5.1 Zufall

Definition 67 (Extensives Spiel mit perfekter Information und Zufallszügen). Ein **extensives Spiel mit perfekter Information und Zufallszügen** ist ein Tupel $\Gamma = \langle N, H, P, f_c, (u_i) \rangle$, wobei N, H und u_i wie bei extensiven Spielen definiert sind, die Spielerfunktion $P : H \to N \cup \{ c \}$ auch den Wert c für einen Zufallsknoten annehmen kann, und für jedes $h \in H$ mit $P(h) = c$ die Funktion $f_c(\cdot|h)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $A(h)$ ist, wobei die Wahrscheinlichkeitsmaße $f_c(\cdot|h)$ für alle $h \in H$ unabhängig voneinander sind.

Strategien in extensiven Spielen mit perfekter Information und Zufallszügen sind wie zuvor definiert. Der Ausgang eines Spieles bei gegebenem Strategieprofil ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß über der Menge der terminalen Historien und U_i ist die erwartete Auszahlung für Spieler i.

Bemerkung 68. Die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft und der Satz von Kuhn gelten weiterhin. Beim Beweis des Satzes von Kuhn muss man nun mit dem *erwarteten* Nutzen arbeiten.

5.5.2 Simultane Züge

Definition 69 (Simultane Züge). Ein **extensives Spiel mit perfekter Information und simultanen Zügen** ist ein Tupel $\langle N, H, P, (u_i) \rangle$, wobei N, H und (u_i) wie zuvor definiert sind und $P : H \to \text{Pot}(N)$ jeder nichtterminalen Historie eine *Menge* von Spielern zuordnet. Für alle $h \in H \setminus Z$ existiert eine Familie $(A_i(h))_{i \in P(h)}$ so, dass

$$A(h) = \{ a \mid (h, a) \in H \} = \bigtimes_{i \in P(h)} A_i(h).$$

Die beabsichtigte Interpretation simultaner Züge ist, dass alle Spieler aus $P(h)$ gleichzeitig ziehen. Strategien sind dann Funktionen $s_i : h \mapsto a_i$ mit $a_i \in A_i(h)$, Historien sind Sequenzen von Vektoren von Aktionen. In der Definition teilspielperfekter Gleichgewichte muss die Bedingung $P(h) = i$ durch $i \in P(h)$ ersetzt werden.

Bemerkung 70. Der Satz von Kuhn gilt nicht mehr, da zum Beispiel das Matching-Pennies-Spiel auch ein extensives Spiel mit perfekter Information und mit simultanen Zügen ist.

Beispiel 71 (Kuchenverteilspiel). Das Kuchenverteilspiel für 3 Spieler funktioniert wie folgt: zunächst schlägt Spieler 1 vor, wie der Kuchen unter den Spielern aufgeteilt werden soll. Dazu ordnet er jedem Spieler $i \in \{ 1, 2, 3 \}$ einen Anteil $x_i \in [0, 1]$ zu.

Danach entscheiden sich die anderen Spieler *gleichzeitig* und unabhängig voneinander, ob sie mit dieser Aufteilung einverstanden sind. Sie können die Aufteilung entweder akzeptieren (J) oder ablehnen (N).

Wenn alle anderen Spieler die Aufteilung akzeptieren, erhält jeder Spieler $i \in \{ 1, 2, 3 \}$ den ihm zugewiesenen Anteil des Kuchens (Nutzen x_i). Anderenfalls diskutieren die Spieler, bis der Kuchen vergammelt (Nutzen 0).

Formal ergibt sich das folgende extensive Spiel mit perfekter Information und simultanen Zügen: $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$, wobei $N = \{ 1, 2, 3 \}$, $H = \{ \langle\rangle \} \cup X \cup \{ \langle x, y \rangle \mid x \in X, y \in \{ J, N \} \times \{ J, N \} \}$ mit $X = \{ \langle x \rangle \mid x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \}$. Außerdem ist $P(\langle\rangle) = \{ 1 \}$ und $P(\langle x \rangle) = \{ 2, 3 \}$ für alle $x \in X$ sowie $u_i(\langle x, y \rangle) = 0$, falls $y \in \{ (J, N), (N, J), (N, N) \}$ und $u_i(\langle x, y \rangle) = x_i$, falls $y = (J, J)$.

Die teilspielperfekten Gleichgewichte in Γ lassen sich wie folgt bestimmen: wir betrachten zunächst die Teilspiele, die sich ergeben, nachdem Spieler 1 eine Aufteilung $x = (x_1, x_2, x_3)$ gewählt hat. X ist die Menge aller legalen Aufteilungen.

In allen solchen Teilspielen gibt es mindestens zwei Nash-Gleichgewichte, nämlich (J, J) (beide Spieler akzeptieren die Aufteilung) und (N, N) (keiner der beiden Spieler akzeptiert die Aufteilung). Zusätzlich gibt es in den Teilspielen mit $x_2 = 0$ das Gleichgewicht (N, J) (nur Spieler 3 akzeptiert die Aufteilung) und in den Teilspielen mit $x_3 = 0$ das Gleichgewicht (J, N) (nur Spieler 2 akzeptiert die Aufteilung).

Seien nun s_2 und s_3 beliebige Strategien für die Spieler 2 bzw. 3, so dass für alle Aufteilungen $x \in X$ das Profil $(s_2(\langle x \rangle), s_3(\langle x \rangle))$ eines der oben beschriebenen Nash-Gleichgewichte ist.

Sei ferner $X_J = \{ x \in X \mid s_2(\langle x \rangle) = s_3(\langle x \rangle) = J \}$ die Menge der akzeptierten Aufteilungen unter s_2 und s_3. Dann unterscheiden wir drei Fälle:

1. $X_J = \varnothing$ oder $x_1 = 0$ für alle $x \in X_J$. Dann ist (s_1, s_2, s_3) für beliebig gewähltes s_1 ein teilspielperfektes Gleichgewicht.
2. $X_J \neq \varnothing$ und es gibt Verteilungen $x_{\max} = (x_1, x_2, x_3) \in X_J$, die $x_1 > 0$ maximieren. Dann ist (s_1, s_2, s_3) genau dann ein teilspielperfektes Gleichgewicht, wenn $s_1(\langle\rangle)$ eine solche Verteilung $x_{\max}$ ist.
3. $X_J \neq \varnothing$ und es gibt keine Verteilungen $(x_1, x_2, x_3) \in X_J$, die x_1 maximieren. Dann gibt es kein teilspielperfektes Gleichgewicht, bei dem Spieler 2 der Strategie s_2 und Spieler 3 der Strategie s_3 folgt.