der Bedingung, dass Spieler 2 L spielt. Tatsächlich würde Spieler 2 jedoch in der Situation, in der er zwischen L und R entscheiden muss, niemals L spielen, da er sich dadurch selbst schlechter stellen würde. Man bezeichnet L daher als „leere“ oder „unplausible Drohung“.

Ebenso tritt das Phänomen der „leeren Drohungen“ beim Aufteilungsspiel auf: die Nash-Gleichgewichte der strategischen Form sind $((2,0), jjj)$, $((2,0), jjn)$, $((2,0), jnj)$, $((2,0), jnn)$, $((1,1), njj)$, $((1,1), njn)$, $((0,2), nnj)$, $((2,0), nnj)$ und $((2,0), nnn)$. Bis auf $((2,0), jjj)$ und $((1,1), njj)$ enthalten alle Nash-Gleichgewichte „leere Drohungen“.

5.4 Teilspielperfekte Gleichgewichte

Idee: um Gleichgewichte mit leeren Drohungen auszuschließen, fordert man, dass die Strategien nicht nur in der strategischen Form des gesamten Spieles, sondern auch in der jedes Teilspiels im Gleichgewicht sind.

Definition 58 (Teilspiel). Ein **Teilspiel** eines extensiven Spiels mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$, das nach der Historie h beginnt, ist das Spiel $\Gamma(h) = \langle N, H|_h, P|_h, (u_i|_h)\rangle$, wobei $H|_h = \{\, h' \mid (h, h') \in H \,\}$, $P|_h(h') = P(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$ und $u_i|_h(h') = u_i(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$.

Für eine Strategie s_i und Historie h des Spiels Γ sei $s_i|_h$ die durch s_i induzierte Strategie für $\Gamma(h)$, genauer $s_i|_h(h') = s_i(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$. O_h ist die Ergebnisfunktion für $\Gamma(h)$.

Definition 59 (Teilspielperfektes Gleichgewicht). Ein **teilspielperfektes Gleichgewicht (TPG)** in einem extensiven Spiel mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ist ein Strategieprofil s^*, so dass für jeden Spieler i und für jede nicht-terminale Historie $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = i$ gilt:

$$u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h)) \geq u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s_i))$$

für jede Strategie s_i des Spielers i im Teilspiel $\Gamma(h)$.

Beispiel 60. Betrachte das extensive Spiel aus Beispiel 57. Die strategische Form dieses Spieles besitzt zwei Nash-Gleichgewichte, nämlich (A, R) und (B, L). Betrachte zunächst (A, R): in der Historie $h = A$ ist die auf das Teilspiel eingeschränkte Strategiekombination teilspielperfekt, da Spieler 2 dann R wählt. In der Historie $h = \langle\rangle$ erhält Spieler 1 den Nutzen 1 bei Wahl von B und den Nutzen 2 bei Wahl von A; also ist (A, R) ein TPG.

Betrachte nun (B, L): dieses Strategieprofil ist nicht teilspielperfekt, da L in der Historie $h = \langle A\rangle$ nicht den Nutzen von Spieler 2 maximiert.

Beispiel 61. Betrachte das Verteilungsspiel aus Beispiel 50. Es gibt drei echte Teilspiele, in denen jeweils Spieler 2 am Zug ist. Nach der Historie $(2,0)$ sind sowohl j als auch n teilspielperfekt, nach $(1,1)$ und $(0,2)$ jeweils nur j. Für das gesamte Spiel kommen also nur Strategieprofile in Frage, bei denen Spieler 2 eine der Strategien jjj oder njj spielt. Davon sind $((2,0), jjj)$ und $((1,1), njj)$ teilspielperfekte Gleichgewichte, $((2,0), njj)$, $((1,1), jjj)$, $((0,2), njj)$ und $((0,2), jjj)$ nicht.

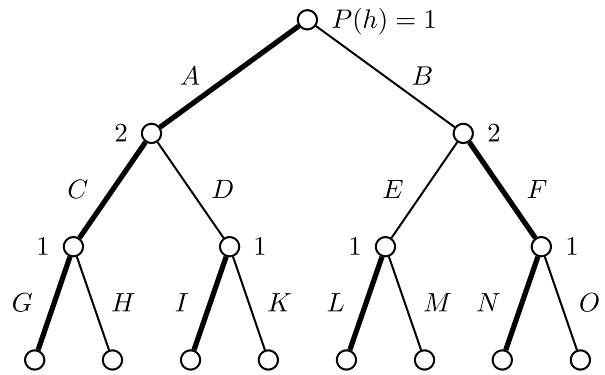
Lemma 14 (Ein-Schritt-Abweichung). *Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ein extensives Spiel mit perfekter Information und* endlichem Horizont. *Das Strategieprofil s^* ist ein teilspielperfektes*

Gleichgewicht von Γ gdw. für jeden Spieler $i \in N$ und jede Historie $h \in H$ mit $P(h) = i$ gilt:

$$u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h)) \geq u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s_i))$$

für jede Strategie s_i des Spielers i im Teilspiel $\Gamma(h)$, die sich von $s^*_i|_h$ nur in der Aktion unterscheidet, die direkt nach der initialen Historie von $\Gamma(h)$ vorgeschrieben wird.

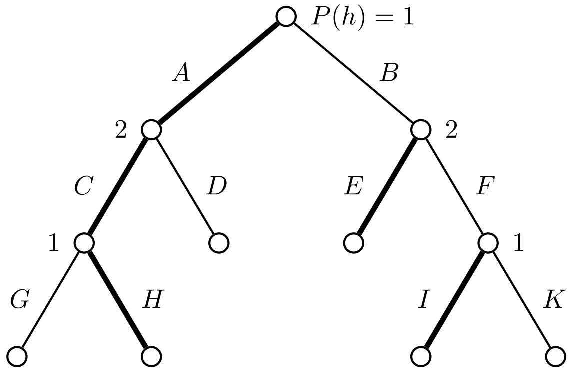
Beweis. Falls s^* ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, gilt die Eigenschaft natürlich. Angenommen, s^* ist kein teilspielperfektes Gleichgewicht. Dann existieren eine Historie h und ein Spieler i so, dass es eine profitable Abweichung s_i in $\Gamma(h)$ gibt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass die Anzahl der Historien h' mit der Eigenschaft, dass $s_i(h') \neq s^*_i|_h(h')$ ist, höchstens so groß wie die Länge der längsten Historie in $\Gamma(h)$ ist. Diese Annahme ist erlaubt, da es zu jeder profitablen Abweichung s_i von $s^*_i|_h$ eines Spielers i eine profitable Abweichung $\tilde{s_i}$ dieses Spielers gibt, bei der alle Historien h' mit $\tilde{s_i}(h') \neq s^*_i|_h(h')$ auf *einem* Pfad des Spielbaumes liegen. Betrachte dazu etwa die folgende Visualisierung, wobei $s^*_1|_h = AGILN$ und $s^*_2|_h = CF$:



Angenommen, $s_1 = BHKMO$ ist eine profitable Abweichung von Spieler 1. Dann ist auch $\tilde{s_1} = BGILO$ eine profitable Abweichung. $\tilde{s_1}$ unterscheidet sich aber nur an zwei Historien von $s^*_1|_h$, während die längste Historie in $\Gamma(h)$ die Länge drei hat.

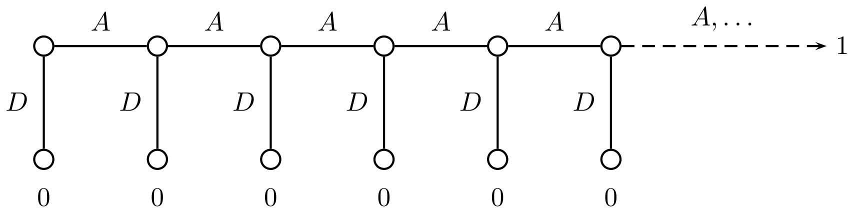
Wegen des endlichen Horizonts von Γ ist diese Anzahl der Historien h' mit der Eigenschaft, dass $s_i(h') \neq s^*_i|_h(h')$ ist, endlich. Wähle also eine profitable Abweichung s_i in $\Gamma(h)$ so, dass die Anzahl der Historien h' mit $s_i(h') \neq s^*_i|_h(h')$ minimal ist. Sei dann h^* die längste Historie in $\Gamma(h)$ mit $s_i(h') \neq s^*_i|_h(h')$. Dann ist die initiale Historie in $\Gamma(h, h^*)$ die einzige, an der sich $s_i|_{h^*}$ von $s^*_i|_{(h,h^*)}$ unterscheidet. Außerdem ist $s_i|_{h^*}$ eine profitable Abweichung in $\Gamma(h, h^*)$, da wir gefordert haben, dass h^* die *längste* Historie in $\Gamma(h)$ mit $s_i(h') \neq s^*_i|_h(h')$ ist, d.h. (h, h^*) ist das gesuchte Teilspiel. □

Beispiel 62. Betrachte das folgende extensive Spiel mit perfekter Information Γ:



Will man zeigen, dass das Profil (AHI, CE) ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, so genügt es, für Spieler 1 die abweichenden Strategien G im Teilspiel $\Gamma(\langle A, C\rangle)$, K im Teilspiel $\Gamma(\langle B, F\rangle)$ und BHI in Γ sowie für Spieler 2 die abweichenden Strategien D im Teilspiel $\Gamma(\langle A\rangle)$ und F im Teilspiel $\Gamma(\langle B\rangle)$ zu betrachten. Insbesondere ist es z. B. nicht notwendig, die abweichende Strategie BGK von Spieler 1 in Γ auf Profitabilität zu untersuchen.

Bemerkung 63. Die entsprechende Aussage für Spiele ohne endlichen Horizont gilt nicht. Betrachte etwa das folgende Ein-Spieler-Spiel:



Die Strategie s_i mit $s_i(h) = D$ für alle $h \in H \setminus Z$ ist kein teilspielperfektes Gleichgewicht, da sie von der Strategie s_i^* mit $s_i^*(h) = A$ für alle $h \in H \setminus Z$ dominiert wird, erfüllt jedoch die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft.

Satz 15 (Satz von Kuhn). *Jedes endliche extensive Spiel mit perfekter Information hat ein teilspielperfektes Gleichgewicht.*

Beweis. Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ein endliches extensives Spiel mit perfekter Information. Konstruiere ein teilspielperfektes Gleichgewicht durch Induktion über die Länge $\ell(h)$ der zu den Teilspielen führenden Historien. Konstruiere parallel dazu eine Funktion $R : H \to H$ so, dass $R(h)$ eine Historie für $\Gamma(h)$ mit $(h, h') \in Z$ ist.

Falls $\ell(\Gamma(h)) = 0$, dann ist $R(h) = \langle\rangle$. Sei $R(h)$ für alle $h \in H$ mit $\ell(\Gamma(h)) \leq k$ bereits definiert. Betrachte nun $h^* \in H$ mit $\ell(\Gamma(h^*)) = k + 1$ und $P(h^*) = i$. Es muss gelten $\ell(\Gamma(h^*, a)) \leq k$ für alle $a \in A(h^*)$. Definiere $s_i(h^*)$ als u_i-Maximierer für $(h^*, a, R(h^*, a))$ über $a \in A(h^*)$ und setze $R(h^*) := (s_i(h^*), R(h^*, s_i(h^*)))$. Induktiv erhalten wir dabei ein Strategieprofil, das die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft erfüllt. Mit dem vorigen Lemma folgt, dass das Strategieprofil ein TPG ist. $\square$

Bemerkung 64. Die entsprechende Aussage gilt nicht für unendliche Spiele.