

5 Extensive Spiele mit perfekter Information

In Spielen hat man oft mehrere Züge hintereinander, was mit strategischen Spielen ohne weiteres nicht modelliert werden kann. Das Spiel kann dann aber durch einen Spielbaum beschrieben werden. Strategien sind nun nicht mehr einzelne Aktionen oder Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Aktionen, sondern Vorschriften, die für jeden Entscheidungspunkt im Spielbaum festlegen, welche Aktion dort gewählt wird.

Die extensive Form eines Spiels kann man in eine strategische Form übersetzen, in welcher man anschließend die Nash-Gleichgewichte bestimmen kann.

5.1 Formalisierung von extensiven Spielen

Definition 49 (Extensives Spiel mit perfekter Information). Ein **extensives Spiel mit perfekter Information**, d.h. ein Spiel, in dem alle Spieler zu allen Zeitpunkten alle Informationen besitzen, die sie benötigen, um ihre Entscheidung zu treffen, hat folgende Komponenten:

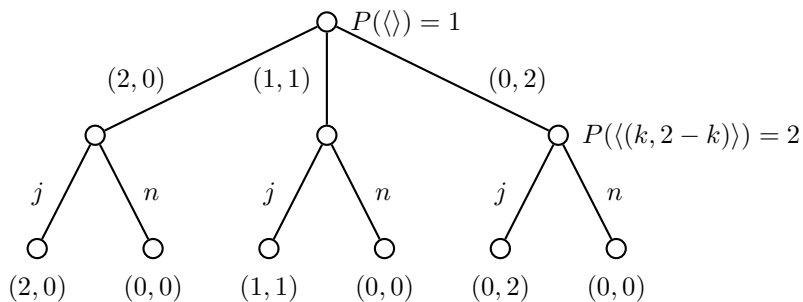
- Eine endliche nicht-leere Menge N von Spielern.
- Eine Menge H (**Historien**) von Sequenzen mit folgenden Eigenschaften:
 - Die leere Sequenz $\langle \rangle$ gehört zu H
 - Falls $\langle a^1, \dots, a^k \rangle \in H$ (wobei $k = \infty$ sein kann) und $l < k$, dann ist auch $\langle a^1, \dots, a^l \rangle \in H$
 - Falls für eine unendliche Sequenz $\langle a^i \rangle_{i=1}^\infty$ gilt, dass $\langle a^i \rangle_{i=1}^k \in H$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann auch $\langle a^i \rangle_{i=1}^\infty \in H$.

Alle unendlichen Historien und alle Historien $\langle a^i \rangle_{i=1}^k \in H$, für die es kein a^{k+1} gibt, so dass $\langle a^i \rangle_{i=1}^{k+1} \in H$, heißen terminale Historien. Die Menge der terminalen Historien wird mit Z bezeichnet. Elemente einer Historie heißen **Aktionen**.

- Eine Spielerfunktion $P : H \setminus Z \rightarrow N$, die bestimmt, welcher Spieler nach einer Historie als nächster am Zug ist.
- Für jeden Spieler $i \in N$ eine Auszahlungsfunktion $u_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$ auf der Menge der terminalen Historien.

Das Spiel heißt endlich, wenn H endlich ist. Es hat einen **endlichen Horizont**, falls die Länge der Historien nach oben beschränkt ist.

Beispiel 50 (Verteilungsspiel). Zwei gleiche Objekte sollen auf zwei Spieler verteilt werden. Spieler 1 schlägt die Aufteilung vor, Spieler 2 akzeptiert den Vorschlag oder lehnt ihn ab. Wenn Spieler 2 akzeptiert, werden die Objekte so aufgeteilt, wie von Spieler 1 vorgeschlagen, ansonsten erhält keiner der Spieler etwas. Darstellung als Spielbaum:



Formal ist hier $N = \{1, 2\}$, $H = \{\langle \rangle, \langle(2, 0)\rangle, \langle(1, 1)\rangle, \langle(0, 2)\rangle, \langle(2, 0), j\rangle, \langle(2, 0), n\rangle, \dots\}$, $P(\langle \rangle) = 1$, $P(h) = 2$ für alle $h \in H \setminus Z$ mit $h \neq \langle \rangle$ und $u_1(\langle(2, 0), j\rangle) = 2$, $u_2(\langle(2, 0), j\rangle) = 0$, usw.

Notation 51. Sei $h = \langle a^1, \dots, a^k \rangle$ eine Historie und a eine Aktion. Dann ist (h, a) die Historie $\langle a^1, \dots, a^k, a \rangle$. Falls $h' = \langle b^1, \dots, b^l \rangle$, dann ist $(h, h') := \langle a^1, \dots, a^k, b^1, \dots, b^l \rangle$. Die Menge der Aktionen, aus denen der Spieler $P(h)$ nach einer Historie $h \in H \setminus Z$ auswählen kann, notieren wir als

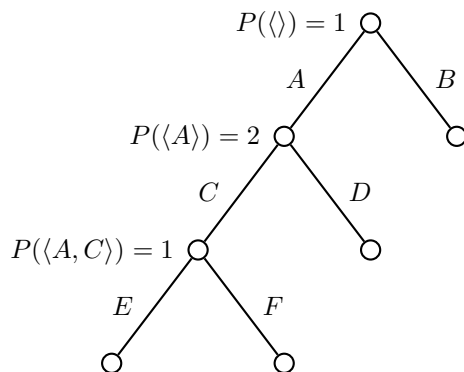
$$A(h) = \{ a \mid (h, a) \in H \}.$$

5.2 Strategien in extensiven Spielen

Definition 52 (Strategie in extensiven Spielen mit perfekter Information). Eine **Strategie** eines Spielers i in einem extensiven Spiel mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ist eine Funktion s_i , die jeder Historie $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = i$ eine Aktion aus $A(h)$ zuweist.

Notation 53 (für endliche Spiele). Eine Strategie für einen Spieler wird notiert als Folge von Aktionen an Entscheidungspunkten, die in Breitensuche-Reihenfolge besucht werden.

Beispiel 54. Strategienotation in einem endlichen Spiel:



Die Strategien für Spieler 1 sind AE , AF , BE und BF , die Strategien für Spieler 2 sind C und D .

Man notiert auf jeden Fall für jeden einzelnen Knoten die Entscheidung, also auch für Kombinationen, die nie entstehen können. Man betrachtet diese Teilstrategien mit, da der andere Spieler die Strategie auch ändern könnte. Man kann eine Strategie als Programm auffassen, das definiert, was an jedem Punkt zu tun ist.

Definition 55 (Ergebnis). Das **Ergebnis** $O(s)$ für ein Strategieprofil $s = (s_i)_{i \in N}$ ist die, möglicherweise unendliche, terminale Historie $h = \langle a^i \rangle_{i=1}^k$ (mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), für die gilt, dass für alle $l \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq l < k$:

$$s_{P(\langle a^1, \dots, a^l \rangle)}(\langle a^1, \dots, a^l \rangle) = a^{l+1}.$$

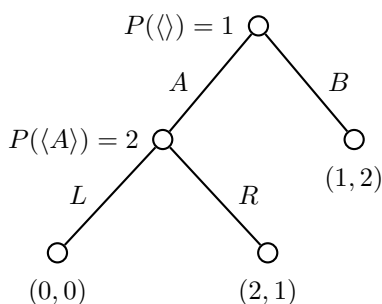
5.3 Nash-Gleichgewichte in extensiven Spielen

Definition 56 (Nash-Gleichgewicht in extensiven Spielen mit perfekter Information). Ein **Nash-Gleichgewicht** in einem extensiven Spiel mit perfekter Information $\langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ist ein Strategieprofil s^* , so dass für jeden Spieler $i \in N$ und für alle Strategien s_i gilt, dass

$$u_i(O(s_{-i}^*, s_i^*)) \geq u_i(O(s_{-i}^*, s_i)).$$

Äquivalent kann man die **strategische Form** von extensiven Spielen definieren.

Beispiel 57. Betrachte das durch den folgenden Spielbaum beschriebene extensive Spiel mit perfekter Information.



Spieler 1 hat die Strategien A und B , Spieler 2 die Strategien L und R zur Auswahl. Die strategische Form dieses Spieles ist

		Spieler 2	
		L	R
Spieler 1	A	0, 0	2, 1
	B	1, 2	1, 2

Die Nash-Gleichgewichte der strategischen Form sind (B, L) und (A, R) . Das Nash-Gleichgewicht (B, L) ist jedoch unrealistisch: Spieler 1 spielt hier B , weil dies optimal ist, unter

der Bedingung, dass Spieler 2 L spielt. Tatsächlich würde Spieler 2 jedoch in der Situation, in der er zwischen L und R entscheiden muss, niemals L spielen, da er sich dadurch selbst schlechter stellen würde. Man bezeichnet L daher als „leere“ oder „unplausible Drohung“.

Ebenso tritt das Phänomen der „leeren Drohungen“ beim Aufteilungsspiel auf: die Nash-Gleichgewichte der strategischen Form sind $((2, 0), jjj)$, $((2, 0), jjn)$, $((2, 0), jnj)$, $((2, 0), jnn)$, $((1, 1), njj)$, $((1, 1), njn)$, $((0, 2), nnj)$, $((2, 0), nnj)$ und $((2, 0), nnn)$. Bis auf $((2, 0), jjj)$ und $((1, 1), njj)$ enthalten alle Nash-Gleichgewichte „leere Drohungen“.

5.4 Teilspielperfekte Gleichgewichte

Idee: um Gleichgewichte mit leeren Drohungen auszuschließen, fordert man, dass die Strategien nicht nur in der strategischen Form des gesamten Spieles, sondern auch in der jedes Teilspiels im Gleichgewicht sind.

Definition 58 (Teilspiel). Ein **Teilspiel** eines extensiven Spieles mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$, das nach der Historie h beginnt, ist das Spiel $\Gamma(h) = \langle N, H|_h, P|_h, (u_i|_h) \rangle$, wobei $H|_h = \{ h' \mid (h, h') \in H \}$, $P|_h(h') = P(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$ und $u_i|_h(h') = u_i(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$.

Für eine Strategie s_i und Historie h des Spieles Γ sei $s_i|_h$ die durch s_i induzierte Strategie für $\Gamma(h)$, genauer $s_i|_h(h') = s_i(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$. O_h ist die Ergebnisfunktion für $\Gamma(h)$.

Definition 59 (Teilspielperfektes Gleichgewicht). Ein **teilspielperfektes Gleichgewicht (TPG)** in einem extensiven Spiel mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ist ein Strategieprofil s^* , so dass für jeden Spieler i und für jede nicht-terminale Historie $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = i$ gilt:

$$u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s_i^*|_h)) \geq u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s_i))$$

für jede Strategie s_i des Spielers i im Teilspiel $\Gamma(h)$.

Beispiel 60. Betrachte das extensive Spiel aus Beispiel 57. Die strategische Form dieses Spieles besitzt zwei Nash-Gleichgewichte, nämlich (A, R) und (B, L) . Betrachte zunächst (A, R) : in der Historie $h = A$ ist die auf das Teilspiel eingeschränkte Strategiekombination teilspielperfekt, da Spieler 2 dann R wählt. In der Historie $h = \langle \rangle$ erhält Spieler 1 den Nutzen 1 bei Wahl von B und den Nutzen 2 bei Wahl von A ; also ist (A, R) ein TPG.

Betrachte nun (B, L) : dieses Strategieprofil ist nicht teilspielperfekt, da L in der Historie $h = \langle A \rangle$ nicht den Nutzen von Spieler 2 maximiert.

Beispiel 61. Betrachte das Verteilungsspiel aus Beispiel 50. Es gibt drei echte Teilspiele, in denen jeweils Spieler 2 am Zug ist. Nach der Historie $(2, 0)$ sind sowohl j als auch n teilspielperfekt, nach $(1, 1)$ und $(0, 2)$ jeweils nur j . Für das gesamte Spiel kommen also nur Strategieprofile in Frage, bei denen Spieler 2 eine der Strategien jjj oder njj spielt. Davon sind $((2, 0), jjj)$ und $((1, 1), njj)$ teilspielperfekte Gleichgewichte, $((2, 0), njj)$, $((1, 1), jjj)$, $((0, 2), njj)$ und $((0, 2), jjj)$ nicht.

Lemma 14 (Ein-Schritt-Abweichung). Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ein extensives Spiel mit perfekter Information und endlichem Horizont. Das Strategieprofil s^* ist ein teilspielperfektes