1. Zähle alle $(2^n - 1) \cdot (2^m - 1)$ möglichen Paare von Supportmengen auf. Für jedes solche Paar aus $supp(\alpha)$ und $supp(\beta)$:
2. Konvertiere das LCP in ein lineares Programm. Dabei sind (4.6), (4.7), (4.10) und (4.11) bereits lineare Ungleichungen, Bedingungen der Form $\alpha(a_i) \cdot (u - U_1(a_i, \beta)) = 0$ werden durch eine neue lineare Gleichung ersetzt, nämlich
   - $u - U_1(a_i, \beta) = 0$, falls $a_i \in supp(\alpha)$ und
   - $\alpha(a_i) = 0$, sonst,

   entsprechend für Bedingungen der Form $\beta(b_j) \cdot (v - U_2(\alpha, b_j)) = 0$. Da die Kriterien, die optimiert werden sollen, bereits in den Constraints stehen, benötigen wir eine beliebige, von den Constraints unabhängige Optimierungsfunktion, etwa die konstante Nullfunktion.
3. Wende einen Lösungsalgorithmus für lineare Programme, zum Beispiel den Simplex-Algorithmus, auf das transformierte Programm an.

Die Laufzeit des naiven Algorithmus beträgt $\mathcal{O}(p(n+m) \cdot 2^{n+m})$, wobei p ein geeignetes Polynom ist. In der Praxis besser geeignet ist der Lemke-Howson-Algorithmus. Die Frage, ob LcpSolve in **P** liegt, ist offen, aber es liegt auf jeden Fall in **NP**, da man den naiven Algorithmus auch als nichtdeterministischen Polynomialzeitalgorithmus betrachten kann, bei dem im ersten Schritt ein Paar aus $supp(\alpha)$ und $supp(\beta)$ „geraten", im zweiten Schritt wie oben vorgegangen und im dritten Schritt ein Polynomialzeitalgorithmus für die Lösung linearer Programme angewandt wird.

4.3 Komplexität der Nash-Gleichgewichts-Bestimmung in allgemeinen Zwei-Personen-Spielen

Definition 46 (Notationen der Aussagenlogik). Sei φ eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform (KNF). Wir schreiben $V(\varphi)$ für die Menge der Variablen in φ, $L(\varphi)$ für die Menge der Literale über $V(\varphi)$, d.h. $L(\varphi) = V(\varphi) \cup \{\, \neg v \mid v \in V(\varphi)\,\}$. Dabei unterscheiden wir für $v \in V(\varphi)$ die Variable v von dem positiven Literal v. Ist $\ell \in L(\varphi)$, so ist $\bar{\ell}$ das zu ℓ komplementäre Literal, d.h. $\bar{\ell} = \neg v$, falls $\ell = v$, und $\bar{\ell} = v$, falls $\ell = \neg v$. $v(\ell)$ ist die zum Literal $\ell \in L(\varphi)$ gehörende Variable, $C(\varphi)$ die Menge der Klauseln in φ.

Sei $\Theta : V(\varphi) \to \{\, T, F\,\}$ eine Variablenbelegung. Wir schreiben $L(\Theta)$ für die Menge der Literale, die von Θ erfüllt werden, formal $L(\Theta) = \{\, \ell \in L(\varphi) \mid \Theta \models \ell\,\}$.

Definition 47 (Induziertes Spiel). Sei φ eine KNF-Formel und $n := |V(\varphi)|$. Das **von φ induzierte Spiel** $G(\varphi)$ ist das symmetrische Zwei-Personen-Spiel mit der Aktionenmenge $L(\varphi) \cup V(\varphi) \cup C(\varphi) \cup \{\, \square\,\}$ und der Nutzenfunktion u, die definiert ist durch

u	$\ell' \in L(\varphi)$	$v' \in V(\varphi)$	$c' \in C(\varphi)$	$\square$
$\ell \in L(\varphi)$	1, falls $\ell \neq \bar{\ell}'$ -2, falls $\ell = \bar{\ell}'$	-2	-2	-2
$v \in V(\varphi)$	2, falls $v \neq v(\ell')$ $2-n$, falls $v = v(\ell')$	-2	-2	-2
$c \in C(\varphi)$	2, falls $\ell' \notin c$ $2-n$, falls $\ell' \in c$	-2	-2	-2
$\square$	1	1	1	0

Definition 48. Sei Θ eine Variablenbelegung zu φ. Die **von Θ induzierte Strategie** α^Θ ist definiert durch

$$\alpha^\Theta(a) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } a \in L(\Theta) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 10 (Satz von Conitzer und Sandholm). *Sei φ eine KNF-Formel. Dann hat $G(\varphi)$ genau die folgenden Nash-Gleichgewichte:*

1. *das reine Profil $(\Box, \Box)$ mit Nutzenprofil $(0, 0)$ und*
2. *für jede erfüllende Belegung Θ von φ das Profil $(\alpha^\Theta, \alpha^\Theta)$ mit Nutzenprofil $(1, 1)$.*

Beweis. Wir beweisen zunächst, dass alle genannten Strategieprofile Nash-Gleichgewichte sind. Das Profil $(\Box, \Box)$ ist offensichtlich ein Nash-Gleichgewicht, denn Abweichungen verringern den Nutzen von 0 auf -2. Sei also Θ eine erfüllende Belegung von φ. Betrachte das Profil $(\alpha^\Theta, \alpha^\Theta)$ und speziell $U(a, \alpha^\Theta)$ für alle *reinen* Strategien $a \in L(\varphi) \cup V(\varphi) \cup C(\varphi) \cup \{\Box\}$. Wir unterscheiden fünf Fälle:

1. falls $a \in L(\Theta)$: Spieler 2 spielt immer ein Literal $a' \in L(\Theta)$. Da auch $a \in L(\Theta)$, können a und a' nicht komplementär sein. Also erhält Spieler 1 den Nutzen 1, d.h. $U(a, \alpha^\Theta) = 1$.
2. falls $a \in L(\varphi) \setminus L(\Theta)$: Spieler 2 spielt ein Literal $a' \in L(\Theta)$. Der Nutzen von Spieler 1 ist abhängig davon, ob a' komplementär zu a ist oder nicht, hat aber in jedem Fall einen Wert kleiner oder gleich 1. Somit ist wegen der Linearität des erwarteten Nutzens auch $U(a, \alpha^\Theta) \leq 1$.
3. falls $a \in V(\varphi)$: Spieler 2 spielt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ ein Literal a' mit $v(a') = a$, was Spieler 1 den Nutzen $2 - n$ bringt, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{n}$ ein anderes Literal, was Spieler 1 den Nutzen 2 bringt. Der erwartete Nutzen von Spieler 1 beträgt somit $U(a, \alpha^\Theta) = \frac{1}{n}(2 - n) + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 2 = \frac{2}{n} - 1 + 2 - \frac{2}{n} = 1$.
4. falls $a \in C(\varphi)$: Wegen $\Theta \models \varphi$ gilt auch $\Theta \models a$, d.h. $L(\Theta) \cap a \neq \varnothing$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $1 - \frac{1}{n}$ beträgt der Nutzen von Spieler 1 also 2, mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $\frac{1}{n}$ beträgt er $2 - n$. Damit ist $U(a, \alpha^\Theta) \leq 2(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}(2 - n) = 1$.
5. falls $a = \Box$: In diesem Fall ist $U(a, \alpha^\Theta) = 1$.

Insgesamt folgt, dass alle $a \in \mathit{supp}(\alpha^\Theta)$ beste Antworten auf α^Θ sind und daher $(\alpha^\Theta, \alpha^\Theta)$ nach dem Support-Lemma ein Nash-Gleichgewicht ist.

Wir müssen nun noch beweisen, dass es in $G(\varphi)$ keine weiteren Nash-Gleichgewichte gibt. Sei dazu (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht in $G(\varphi)$. Wir wollen zunächst ausschließen, dass eine der beiden Strategien α_1, α_2 die reine Strategie $\Box$ ist. Ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \Box$, so liegt zwar ein Nash-Gleichgewicht vor, jedoch kein *neues*, sondern eines der Gleichgewichte, die im Satz von Conitzer und Sandholm erwähnt werden. Ist $\alpha_2 = \Box$, so ist $\alpha_1 = \Box$ die *einzige* beste Antwort auf α_2. Also existiert kein Nash-Gleichgewicht $(\alpha, \Box)$ oder $(\Box, \alpha)$ mit $\alpha \neq \Box$.

Betrachte nun nur noch Fälle mit $\alpha_1(\Box) < 1$ und $\alpha_2(\Box) < 1$. Sei (β_1, β_2) das Strategieprofil, das sich aus (α_1, α_2) in den Situationen ergibt, in denen kein Spieler $\Box$ spielt, d.h. wo für $i \in \{1, 2\}$ gilt, dass $\beta_i(\Box) = 0$ und $\beta_i(a) = \alpha_i(a) \cdot \frac{1}{1 - \alpha_i(\Box)}$ für alle $a \neq \Box$. Es gilt

$U(\beta_1, \beta_2) \geq 1$, denn sonst wäre

$$\begin{aligned}
U(\alpha_1, \beta_2) &= \alpha_1(\square) \cdot 1 + (1 - \alpha_1(\square)) \cdot U(\beta_1, \beta_2) \\
&< \alpha_1(\square) \cdot 1 + (1 - \alpha_1(\square)) \cdot 1 = 1 = U(\square, \beta_2) \quad \text{sowie} \\
U(\alpha_1, \square) &= \alpha_1(\square) \cdot 0 + (1 - \alpha_1(\square)) \cdot (-2) \\
&< 0 = U(\square, \square),
\end{aligned}$$

ein Widerspruch, da α_1 dann keine beste Antwort auf α_2, eine Mischung aus β_2 und $\square$, sein könnte.

Wegen der Symmetrie von $G(\varphi)$ gilt ebenso $U(\beta_2, \beta_1) \geq 1$. Durch Addition der beiden Ungleichungen erhalten wir

$$U(\beta_1, \beta_2) + U(\beta_2, \beta_1) \geq 2. \tag{4.12}$$

An der Nutzenmatrix lässt sich leicht ablesen, dass *kein* Ausgang eine Nutzensumme echt größer als 2 hat. Also haben *alle* möglichen Ausgänge unter (β_1, β_2) eine Nutzensumme von genau 2 und sind daher von der Art (ℓ, ℓ'), wobei $\ell, \ell' \in L(\varphi)$ und $\ell \neq \bar{\ell}'$. Insbesondere spielt Spieler i keine Variablen oder Klauseln, d.h. $\mathit{supp}(\beta_i) \subseteq L(\varphi)$ und $\mathit{supp}(\alpha_i) \subseteq L(\varphi) \cup \{\square\}$ für $i \in \{1, 2\}$.

Angenommen, $\square \in \mathit{supp}(\alpha_i)$. Dann kann sich der andere Spieler verbessern, indem er immer $\square$ spielt, denn erstens ist $\square$ eine mindestens so gute Antwort auf alle Aktionen aus $L(\varphi) \cup \{\square\}$ wie die Aktionen aus $L(\varphi)$ und zweitens ist $\square$ eine echt bessere Antwort auf $\square$ als die Aktionen aus $L(\varphi)$. Dies steht im Widerspruch zu unserer Voraussetzung, dass (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht ist. Also ist $\square \notin \mathit{supp}(\alpha_i)$ und damit $\alpha_i = \beta_i$ für alle $i \in \{1, 2\}$.

Wegen Ungleichung (4.12) ist somit $U(\alpha_1, \alpha_2) + U(\alpha_2, \alpha_1) \geq 2$. Daraus folgt, dass

$$U(\alpha_1, \alpha_2) = U(\alpha_2, \alpha_1) = 1 \quad \text{und damit} \tag{4.13}$$

$$u(a_1, a_2) = u(a_2, a_1) = 1 \quad \text{für alle } a_i \in \mathit{supp}(\alpha_i). \tag{4.14}$$

Im nächsten Schritt ist zu zeigen, dass $\alpha_i(\ell) + \alpha_i(\bar{\ell}) = \frac{1}{n}$ für alle $\ell \in L(\varphi)$. Angenommen, es gibt eine Variable $v \in V(\varphi)$ so, dass Spieler i mit Wahrscheinlichkeit $p < \frac{1}{n}$ ein zu v gehöriges Literal spielt. Dann könnte der Gegner durch Spielen von v seinen Nutzen erhöhen, denn

$$U(v, \alpha_i) = p \cdot (2 - n) + (1 - p) \cdot 2 = 2p - pn + 2 - 2p = 2 - pn > 2 - \frac{1}{n} \cdot n = 1,$$

wegen Gleichung (4.13) im Widerspruch dazu, dass (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht ist. Also gibt es keine Variable $v \in V(\varphi)$, deren Literale zusammen mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als $\frac{1}{n}$ gespielt werden, d.h. $\alpha_i(\ell) + \alpha_i(\bar{\ell}) \geq \frac{1}{n}$. Wegen $n = |V(\varphi)|$ folgt durch Aufsummieren über alle Variablen und unter Beachtung, dass α_i eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, dass

$$\alpha_i(\ell) + \alpha_i(\bar{\ell}) = \frac{1}{n} \tag{4.15}$$

für alle $\ell \in L(\varphi)$ und $i \in \{1, 2\}$.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass $\mathit{supp}(\alpha_i)$ einer Variablenbelegung für φ entspricht, d.h. dass $\{\ell, \bar{\ell}\} \not\subseteq \mathit{supp}(\alpha_i)$ für alle $\ell \in L(\varphi)$. Nach Gleichung (4.15) spielt jeder Spieler mindestens ein Element aus $\{\ell, \bar{\ell}\}$ für alle $\ell \in L(\varphi)$. Nach Gleichung (4.14) kann es nicht sein, dass ein Spieler mit positiver Wahrscheinlichkeit ℓ und der andere mit positiver Wahrscheinlichkeit $\bar{\ell}$ spielt, da in diesem Fall der Nutzen beider Spieler -2 wäre. Somit können beide Spieler nur entweder ℓ oder $\bar{\ell}$ spielen, genauer:

$$\alpha_1(\ell) = \alpha_2(\ell) = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \alpha_1(\bar{\ell}) = \alpha_2(\bar{\ell}) = 0$$

oder

$$\alpha_1(\ell) = \alpha_2(\ell) = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_1(\bar{\ell}) = \alpha_2(\bar{\ell}) = \frac{1}{n}.$$

Zum Abschluss des Beweises bleibt noch zu zeigen, dass $supp(\alpha_1)$ einer *erfüllenden* Belegung entspricht. Angenommen, Θ ist eine nicht-erfüllende Variablenbelegung für φ. Sei etwa $\alpha_1 = \alpha^\Theta$. Da $\Theta \not\models \varphi$, gibt es eine Klausel $c \in C(\varphi)$ mit $c \cap L(\Theta) = \varnothing$. Für dieses c gilt aber $U(c, \alpha_1) = 2 > 1 = U(\alpha_2, \alpha_1)$, im Widerspruch dazu, dass (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht ist.

Insgesamt haben wir nun bewiesen, dass $(\alpha_1, \alpha_2) = (\Box, \Box)$ oder $(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha^\Theta, \alpha^\Theta)$ für eine φ erfüllende Variablenbelegung Θ sein muss. $\Box$

Korollar 11. *Zu entscheiden, ob ein Nash-Gleichgewicht existiert, bei dem Spieler 1 eine Auszahlung von mindestens k erhält, ist* **NP***-schwer. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen.*

Korollar 12. *Zu entscheiden, ob es ein Nash-Gleichgewicht mit Pareto-optimalem Auszahlungsprofil gibt, ist* **NP***-schwer. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen.*

Korollar 13. *Es ist* **NP***-schwer zu entscheiden, ob es ein Nash-Gleichgewicht gibt, in dem ein Spieler eine bestimmte Aktion manchmal (bzw. nie) spielt. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen.*