4 Algorithmen und Komplexität

In diesem Kapitel werden Algorithmen zur Bestimmung von Nash-Gleichgewichten vorgestellt und auf ihre Komplexität untersucht. Die zentralen Aussagen werden sein, dass in Nullsummenspielen das Finden eines Nash-Gleichgewichts in gemischten Strategien nur polynomielle Zeit benötigt, da man dieses Problem auf das Lösen eines Linearen Programmes zurückführen kann, dass für allgemeine Zwei-Personen-Matrixspiele das Finden eines gemischten Nash-Gleichgewichts ein Problem ist, dessen Komplexität noch unbekannt ist, und dass das Finden eines gemischten Nash-Gleichgewichts mit einem bestimmten Wert (im Sinne von Summe der Auszahlungen oder von Auszahlung für einen der Spieler) **NP**-vollständig ist.

4.1 Nullsummenspiele

Nach dem Satz von Nash existieren Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien. Nach dem Maximin-Satz ist jedes Nash-Gleichgewicht ein Paar von Maximinimierern. Da mindestens ein Nash-Gleichgewicht existiert damit und alle Paare von Miximinimierern Nash-Gleichgewichte sind und zu den gleichen Auszahlungen führen, genügt es, solche Paare zu berechnen.

Laufe dazu über alle gemischten Strategien α von Spieler 1 und bestimme jeweils eine für Spieler 1 schlechteste Antwort β_α von Spieler 2. Bestimme dann einen Maximinimierer α so, dass $U_1(\alpha, \beta_\alpha)$ maximal wird. Wegen des Support-Lemmas (Lemma 8) reicht es aus, anstelle aller möglichen Strategien β_α nur die reinen Antworten von Spieler 2 zu betrachten.

4.1.1 Exkurs Lineare Programmierung/Lineare Optimierung

Der Ausdruck „Lineare Programmierung“ wurde in den 1930er Jahren geprägt – bevor Computer programmiert wurden. Damals bedeutete „Programmierung“ noch Planung (vgl. auch Ausdruck „dynamische Programmierung“).

Worum es geht: Lösung eines Systems linearer Ungleichungen über n reellwertigen Variablen unter Berücksichtigung einer linearen Zielfunktion, die man maximieren (oder minimieren) möchte.

Beispiel 44 (Sortimentproblem). Es werden zwei Sortimente produziert, die beide ganz verkauft werden können.

Sortiment 1: 25 Minuten Schneiden, 60 Minuten Zusammenbauen, 68 Minuten Nachbearbeitung. 30 Euro Gewinn pro Artikel.

Sortiment 2: 75 Minuten Schneiden, 60 Minuten Zusammenbau, 34 Minuten Nachbearbeitung. 40 Euro Gewinn pro Artikel.

Pro Tag stehen zur Verfügung: 450 Minuten zum Zuschneiden, 480 Minuten zum Zusammenbau, 476 Minuten für die Nachbearbeitung.

Wie viele Artikel der beiden Sortimente stellt man her, wenn man den Gewinn maximieren will? Sei zur Beantwortung dieser Frage x die Anzahl der produzierten Artikel in Sortiment 1, y die Anzahl der produzierten Artikel in Sortiment 2.

Die oben genannten Einschränkungen und das Ziel der Gewinnmaximierung lassen sich wie folgt formalisieren:

$$x \geq 0, y \geq 0 \tag{4.1}$$

$$25x + 75y \leq 450 \text{ (oder äquiv. } y \leq \frac{450}{75} - \frac{25x}{75} = 6 - \frac{1}{3}x) \tag{4.2}$$

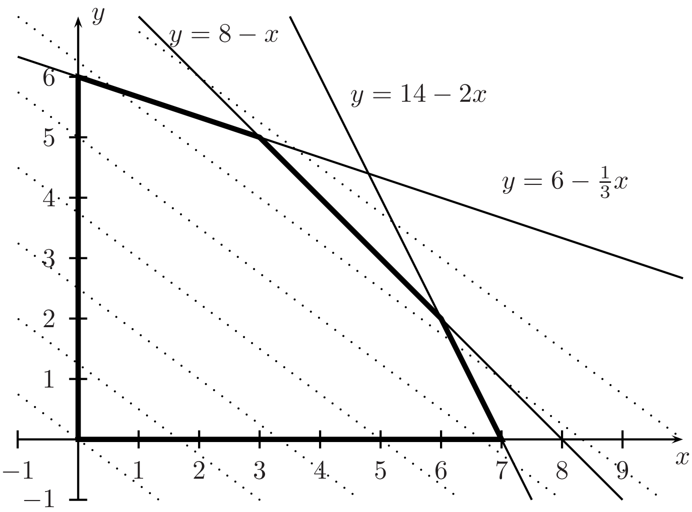
$$60x + 60y \leq 480 \text{ (oder äquiv. } y \leq 8 - x) \tag{4.3}$$

$$68x + 34y \leq 476 \text{ (oder äquiv. } y \leq 14 - 2x) \tag{4.4}$$

$$\text{Maximiere } z = 30x + 40y \tag{4.5}$$

Die Ungleichungen (4.1)-(4.4) beschreiben zulässige Lösungen. Zeile (4.5) ist die *Zielfunktion* (objective function). Die Ungleichungen (4.1)-(4.4) beschreiben eine *konvexe* Menge in $\mathbb{R}^2$.

In der folgenden Abbildung sind die zulässigen Lösungen genau die Punkte in der von den drei Geraden und den Koordinatenachsen eingeschlossenen konvexen Menge. Auf den gepunkteten Linien ist der Nutzen z konstant, von unten nach oben handelt es sich um die Isolinien für $z = 0, 50, 100, \ldots, 300$. Der Nutzen wird also in dem Schnittpunkt der Geraden $y = 6 - \frac{1}{3}x$ und $y = 8 - x$, d.h. in $(x, y) = (3, 5)$, maximiert, der maximale Nutzen beträgt 290.



Definition 45 (Lineares Programm in Standardform). Ein **Lineares Programm in Standardform** besteht aus n reellwertigen Variablen x_i, m Koeffizienten b_j, m Konstanten c_j, $m \cdot n$ Koeffizienten a_{ij}, m Gleichungen der Form

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$$

sowie der (zu minimierenden) **Zielfunktion**

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \text{ (für } x_i \geq 0).$$

Will man die Zielfunktion nicht minimieren, sondern maximieren, so genügt es, die Vorzeichen der Koeffizienten b_i umzukehren. Anstelle von Ungleichungen kann man auch Gleichungen wählen, da

$$x + y \leq c \text{ gdw. } x + y + z = c \text{ für ein } z \geq 0.$$

Ein solches z heißt **Slack-Variable**.

Die **Simplex-Methode** ist das Standardverfahren, um lineare Programme zu lösen, d.h. um zulässige Lösungen zu finden, die die Zielfunktion minimieren bzw. maximieren. Diese Methode hat im schlechtesten Fall exponentielle Laufzeit, ist aber in allen praktischen Fällen „gutmütig". Daneben gibt es auch ein Polynomialzeit-Lösungsverfahren, das jedoch in der Praxis kaum zum Einsatz kommt.

4.1.2 Anwendung auf Nullsummenspiele

Seien $A_1 = \{ a_1, \ldots, a_m \}$ und $A_2 = \{ b_1, \ldots, b_n \}$.

Spieler 1 sucht eine gemischte Strategie α_1. Bestimme für jedes α_1 von Spieler 1 den Nutzen bei der schlimmsten Antwort des Gegners, dann maximiere darüber. Das entsprechende lineare Programm ist

$$\begin{aligned} \alpha_1(a_i) &\geq 0 \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq m \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_1(a_i) &= 1 \\ U_1(\alpha_1, b_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_1(a_i) \cdot u_1(a_i, b_j) &\geq u \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n \\ &\text{Maximiere } u. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Programms ist ein Maximinimierer für Spieler 1. Die Lösung eines analogen Programmes führt zu einem Maximinimierer für Spieler 2.

Da bei Nullsummenspielen, die ein Nash-Gleichgewicht besitzen, Maximinimierung und Minimaximierung das gleiche Ergebnis liefern, kann man auch das lineare Programm mit den Ungleichungen

$$U_1(a_i, \alpha_2) \leq u \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq m$$

aufstellen und u minimieren. Für α_2 entsprechend.

4.2 Finden von Nash-Gleichgewichten bei allgemeinen Zwei-Personen-Matrixspielen

Für allgemeine Spiele funktioniert die LP-Methode nicht. Benutze stattdessen Instanzen des **Linear Complementarity Problem** (LCP), bei dem zu den linearen (Un-)Gleichungen