Bei der spieltheoretischen Modellierung betrachten wir nur Zwei-Personenspiele, die für die „Begegnung“ zweier Individuen stehen, d.h. $N = \{1, 2\}$. Die Tatsache, dass die Individuen derselben Art angehören, wird dadurch modelliert, dass $A_1 = A_2$ und $u_1(a, b) = u_2(b, a)$ (schreibe deshalb kurz $u := u_1$). Gemischte Strategien entsprechen gemischten Populationen.

Eine Strategie $b^* \in B$ ist evolutionär stabil, wenn sie gegen Mutationen resistent ist. Wenn ein kleiner Anteil $\varepsilon > 0$ an Individuen mutiert, d.h. $b \in B \setminus \{b^*\}$ wählt, soll sich trotzdem b^* durchsetzen:

$$\overbrace{\underbrace{(1-\varepsilon)u(b,b^*)}_{\text{M vs. R}} + \underbrace{\varepsilon u(b,b)}_{\text{M vs. M}}}^{U_M \text{ Mutant}} < \overbrace{\underbrace{(1-\varepsilon)u(b^*,b^*)}_{\text{R vs. R}} + \underbrace{\varepsilon u(b^*,b)}_{\text{R vs. M}}}^{U_R \text{ Rein}}.$$

Für kleines ε ist das äquivalent zu

$$u(b, b^*) < u(b^*, b^*) \quad \text{oder} \quad [u(b, b^*) = u(b^*, b^*) \text{ und } u(b, b) < u(b^*, b)]$$

Definition 40 (Symmetrisches strategisches Spiel). Ein strategisches Spiel mit zwei Spielern $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ heißt **symmetrisch**, falls $A_1 = A_2$ und $u_1(a, b) = u_2(b, a)$ für alle $a, b \in A_1$ gilt. $B := A_1 (= A_2)$ heißt Aktionsmenge von G, $u := u_1$ heißt Nutzen- oder Auszahlungsfunktion von G.

Definition 41 (Evolutionär stabile Strategie). Sei G ein symmetrisches strategisches Spiel mit Aktionsmenge B und Nutzenfunktion u. Eine Strategie $b^* \in B$ heißt **evolutionär stabil**, falls

- (b^*, b^*) ein Nash-Gleichgewicht von G ist und
- für alle besten Antworten $b \in B$ auf b^* mit $b \neq b^*$ gilt $u(b, b) < u(b^*, b)$.

Beispiel 42. Falke-oder-Taube-Spiel mit reellem Parameter $c > 0$ für Verlust bei einem Kampf.

	T	F
T	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$0, 1$
F	$1, 0$	$\frac{1}{2}(1-c), \frac{1}{2}(1-c)$

Hat dieses Spiel evolutionär stabile Strategien? Bestimme dazu in einem ersten Schritt alle symmetrischen Nash-Gleichgewichte (b^*, b^*) und untersuche diese in einem zweiten Schritt darauf, ob sie die „Mutanten-Eigenschaft“ erfüllen, d.h. ob für alle abweichenden besten Antworten b gilt, dass $u(b, b) < u(b^*, b)$.

Zur Bestimmung der symmetrischen Nash-Gleichgewichte:

1. reine gegen reine Strategie: (T, T) ist kein Nash-Gleichgewicht, (T, F) und (F, T) sind genau dann Nash-Gleichgewichte, wenn $c \geq 1$, hier aber uninteressant, weil sie nicht symmetrisch sind, und (F, F) ist ein Nash-Gleichgewicht genau dann, wenn $c \leq 1$. F ist also unser erster Kandidat für eine evolutionär stabile Strategie.

2. reine gegen gemischte Strategie: uninteressant, da ein solches Nash-Gleichgewicht nicht symmetrisch wäre.

3. gemischte gegen gemischte Strategie: sei $\alpha^* = (b^*, b^*)$ mit $b^* = \{ T \mapsto p, F \mapsto 1-p \}$, wobei $0 < p < 1$. Es muss gelten, dass $u(T, b^*) = u(F, b^*)$, d.h. $p \cdot \frac{1}{2} + (1-p) \cdot 0 = p \cdot 1 + (1-p) \cdot \frac{1}{2}(1-c)$. Vereinfacht man diese Gleichung, so erhält man zunächst $\frac{1}{2}p = p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}pc$. Dies lässt sich zu $0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}pc$ vereinfachen. Löst man diese Gleichung nach p auf, erhält man $p = \frac{2}{c}(\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{c}$. Wegen $0 < p < 1$ muss $c > 1$ sein. Damit ist α^* für $c > 1$ ein Nash-Gleichgewicht und somit unser zweiter Kandidat für eine evolutionär stabile Strategie.

Untersuche nun die beiden oben ermittelten Kandidaten, ob sie die „Mutanten-Eigenschaft“ erfüllen. Betrachte also alle anderen besten Antworten auf b^*.

1. Kandidat 1: $b^* = F$ für $c \leq 1$. Falls $c < 1$, ist F strikt dominant, d.h. es keine weiteren besten Antworten auf F. Damit ist F evolutionär stabil. Falls $c = 1$, ist auch jede gemischte Strategie $b = \{ T \mapsto q, F \mapsto 1-q \}$ mit $0 < q \leq 1$ eine (abweichende) beste Antwort auf b^*. Da aber $u(b, b) = \frac{1}{2}q^2 + 1 \cdot (1-q) \cdot q = \frac{1}{2}q^2 + q - q^2 = q - \frac{1}{2}q^2 < q = u(b^*, b)$, ist F für $c \leq 1$ evolutionär stabil.

2. Kandidat 2: $b^* = \{ T \mapsto p, F \mapsto 1-p \}$ für $c > 1$. Alle $b \in \Delta(\{ T, F \})$ mit $b = \{ T \mapsto q, F \mapsto 1-q \}$, $0 \leq q \leq 1$, sind beste Antworten auf b^*. Betrachte zunächst nur reine beste Antworten: mit $b = T$ ist $u(b^*, b) = (1 - \frac{1}{c}) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{c} \cdot 1 > \frac{1}{2} = u(b, b)$, mit $b = F$ ist $u(b^*, b) = (1 - \frac{1}{c}) \cdot 0 + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{2}(1-c) > \frac{1}{2}(1-c) = u(b, b)$. Die Bedingung $u(b, b) < u(b^*, b)$ ist wegen $|\{ T, F \}| = 2$ auch für alle anderen $b \in \Delta(\{ T, F \})$ erfüllt. Damit ist b^* für $c > 1$ evolutionär stabil.

Aus der Definition von evolutionär stabilen Strategien folgt, dass symmetrische Nash-Gleichgewichte (b^*, b^*), für die es keine andere beste Antwort gibt, evolutionär stabile Strategien sein müssen. Nicht-strikte NGs müssen nicht unbedingt evolutionär stabile Strategien sein.

Beispiel 43. Betrachte das Spiel

		Spieler 2		
		1	2	3
	1	γ, γ	$1, -1$	$-1, 1$
Spieler 1	2	$-1, 1$	γ, γ	$1, -1$
	3	$1, -1$	$-1, 1$	γ, γ

mit reellem Parameter $0 < \gamma < 1$. Das Profil (α, α) mit $\alpha = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ist ein gemischtes Nash-Gleichgewicht. Die Auszahlung für beide Spieler beträgt $\frac{\gamma}{3}$. α ist aber keine evolutionär stabile Strategie, denn ein Mutant könnte die reine Strategie $\alpha' = (1, 0, 0)$ – oder eine beliebige andere reine Strategie – spielen. Gegen α-Spieler erhielte er damit Auszahlung $\frac{\gamma}{3}$, gegen andere Mutanten, die auch α' spielen, aber Auszahlung $\gamma > \frac{\gamma}{3}$. Das heißt, α_i ist keine evolutionär stabile Strategie. Beachte, dass α' *kein* neues Nash-Gleichgewicht (α', α') induziert.