3. $B(\alpha)$ ist konvex, da $B_i(\alpha_i)$ konvex ist: seien $\alpha_i', \alpha_i'' \in B_i(\alpha_{-i})$, d.h.
$$U_i(\alpha_{-i}, \alpha_i') = U_i(\alpha_{-i}, \alpha_i'').$$
Wegen Gleichung 3.1 gilt dann auch
$$\lambda\alpha_i' + (1-\lambda)\alpha_i'' \in B_i(\alpha_{-i}).$$

4. Es ist noch zu zeigen, dass B ober-hemi-stetig ist. Sei (α^n, β^n) eine Folge in Graph(B) mit $\lim_{n\to\infty}(\alpha^n, \beta^n) = (\alpha, \beta)$; $\alpha^n, \beta^n, \alpha, \beta \in \times_i \Delta(A_i)$ und $\beta^n \in B(\alpha^n)$. Zeige, dass dann $(\alpha, \beta) \in$ Graph(B):
Es gilt für alle $i \in N$:
$$\begin{aligned}
U_i(\alpha_{-i}, \beta_i) &\overset{\text{Def. } \alpha,\, \beta}{=} U_i(\lim_{n\to\infty}(\alpha_{-i}^n, \beta_i^n)) \\
&\overset{\text{Stetigkeit}}{=} \lim_{n\to\infty} U_i(\alpha_{-i}^n, \beta_i^n) \\
&\overset{\beta_i^n \text{ beste Antwort auf } \alpha_{-i}^n}{\geq} \lim_{n\to\infty} U_i(\alpha_{-i}^n, \beta_i') \qquad \text{für alle } \beta_i' \in \Delta(A_i) \\
&\overset{\text{Stetigkeit}}{=} U_i(\lim_{n\to\infty} \alpha_{-i}^n, \beta_i') \qquad \text{für alle } \beta_i' \in \Delta(A_i) \\
&\overset{\text{Def. } \alpha_i}{=} U_i(\alpha_{-i}, \beta_i') \qquad \text{für alle } \beta_i' \in \Delta(A_i)
\end{aligned}$$
Also ist β_i eine beste Antwort auf α_{-i} für alle $i \in N$, damit $\beta \in B(\alpha)$ und schließlich $(\alpha, \beta) \in$ Graph(B).

□

Satz 7 (Verallgemeinerung des Satzes von Nash). *Sei $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ein strategisches Spiel, so dass für jedes $i \in N$*

1. *A_i eine nicht-leere, konvexe und kompakte Menge und*
2. *u_i stetig in A und quasi-konkav in A_i ist.*

Dann besitzt G ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien.

Beweisidee. Ähnlich wie Beweis des Satzes von Nash. Beachte, dass die Quasi-Konkavität von u_i die Konvexität der Mengen der besten Antworten impliziert. □

Lemma 8. *Sei $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ein endliches strategisches Spiel. Dann ist $\alpha^* \in \times_{i\in N} \Delta(A_i)$ ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien gdw. für jeden Spieler $i \in N$ jede reine Strategie aus der Unterstützungsmenge von α_i^* eine beste Antwort auf α_{-i}^* ist.*

Für den einzelnen Spieler ist es also – wenn die anderen Spieler ihre gemischten Strategien beibehalten – egal, ob er seine gemischte Strategie oder eine Einzelaktion daraus spielt.

Beweis. Sei zunächst α^* ein Nash-Gleichgewicht mit $a_i \in supp(\alpha_i^*)$. Angenommen, a_i ist keine beste Antwort auf α_{-i}^*. Wegen der Linearität von U_i kann Spieler i seine Auszahlung verbessern, indem er Gewicht von a_i auf andere Aktionen in $supp(\alpha_i^*)$ verteilt. Also war α_i^* keine beste Antwort und somit im Widerspruch zur Voraussetzung α^* kein Nash-Gleichgewicht.

Für die andere Richtung der Äquivalenz nehmen wir an, dass α^* kein Nash-Gleichgewicht ist. Dann muss es ein $i \in N$ und eine Strategie α'_i mit der Eigenschaft geben, dass $U_i(\alpha^*_{-i}, \alpha'_i) > U_i(\alpha^*_{-i}, \alpha^*_i)$. Wegen der Linearität von U_i muss es eine Aktion $a'_i \in supp(\alpha'_i)$ geben, die höheren Nutzen als eine Aktion $a''_i \in supp(\alpha^*_i)$ bringt; $supp(\alpha^*_i)$ besteht also nicht nur aus besten Antworten auf α^*_{-i}. □

Bemerkung 37. Ist $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ mit $A_1 = \{T, B\}$ und $A_2 = \{L, R\}$ ein Zwei-Spieler-Spiel mit je zwei möglichen Aktionen und ist (α^*_1, α^*_2) mit $\alpha^*_1(T) = 1$ und $0 < \alpha^*_2(L) < 1$ ein Nash-Gleichgewicht in G, so ist auch mindestens eines der Profile (T, L) und (T, R) ein Nash-Gleichgewicht in G.

Nach Voraussetzung sind sowohl L als auch R beste Antworten auf T. Angenommen, T wäre weder auf L noch auf R eine beste Antwort. Dann wäre B sowohl auf L als auch auf R eine bessere Antwort als T. Wegen der Linearität des erwarteten Nutzens wäre B auch eine bessere Antwort als T auf α^*_2, im Widerspruch zu der Annahme, dass (α^*_1, α^*_2) ein Nash-Gleichgewicht in G ist.

Betrachte zum Beispiel das Nash-Gleichgewicht $(\{T \mapsto 1, B \mapsto 0\}, \{L \mapsto \frac{1}{10}, R \mapsto \frac{9}{10}\})$ in dem Spiel

	L	R
T	1, 1	1, 1
B	2, 2	−5, −5

Hier ist auch (T, R) ein (reines) Nash-Gleichgewicht.

Beispiel 38. Gemischte Nash-Gleichgewichte bei Bach oder Strawinsky:

		Strawinsky-Fan	
		B	S
Bach-Fan	B	2, 1	0, 0
	S	0, 0	1, 2

Allgemein: vier mögliche Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien.

Die möglichen echt gemischten Strategieprofile sind

$$\{B\} \text{ vs. } \{B, S\}, \qquad \{S\} \text{ vs. } \{B, S\}, \qquad \{B, S\} \text{ vs. } \{B\},$$
$$\{B, S\} \text{ vs. } \{S\} \qquad \text{und} \qquad \{B, S\} \text{ vs. } \{B, S\}$$

Bei „Bach oder Strawinsky“ gibt es zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien, nämlich (B, B) und (S, S). Wie sieht aber ein echt gemischtes Nash-Gleichgewicht für „Bach oder Strawinsky“ aus? Betrachte hier nur Nash-Gleichgewichte mit $\{B, S\}$ vs. $\{B, S\}$.

Angenommen, (α_1, α_2) ist das gemischte Nash-Gleichgewicht mit $0 < \alpha_1(B) < 1$ und $0 < \alpha_2(B) < 1$. Dann muss wegen Lemma 8 gelten, dass

$$U_1((1,0), (\alpha_2(B), \alpha_2(S))) = U_1((0,1), (\alpha_2(B), \alpha_2(S))).$$

Die linke Seite dieser Gleichung entspricht dem Fall, dass Spieler 1 das Bach-Konzert besucht und hat den Wert $2 \cdot \alpha_2(B) + 0 \cdot \alpha_2(S)$. Die rechte Seite entspricht der Aktion, das Strawinsky-Konzert zu besuchen und hat den Wert $0 \cdot \alpha_2(B) + 1 \cdot \alpha_2(S) = 1 \cdot (1 - \alpha_2(B))$. Gleichsetzen der Werte ergibt $2 \cdot \alpha_2(B) = 1 - \alpha_2(B)$. Daraus folgt, dass $\alpha_2(B) = \frac{1}{3}$ und $\alpha_2(S) = \frac{2}{3}$.

Analog erhält man für Spieler 1, dass $\alpha_1(B) = \frac{2}{3}$ und $\alpha_1(S) = \frac{1}{3}$. Das Nutzenprofil dieses Gleichgewichts ist $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Da der erwartete Nutzen *beider* Spieler geringer ist als etwa in den reinen Strategieprofilen (B, B) oder (S, S), wenn sich die Spieler absprechen würden, betrachtet man sogenannte korrelierte Gleichgewichte:

3.2 Korrelierte Gleichgewichte

Idee: Man benutzt einen öffentlich sichtbaren Würfel, um bei gemischten Strategien zu entscheiden, welche Aktion gespielt wird. Damit kann man eine höhere Auszahlung erhalten.

Beispiel 39. Ein korreliertes Gleichgewicht bei Bach oder Strawinsky: Bei Bach oder Strawinsky gibt es die reinen Nash-Gleichgewichte (B, B) und (S, S) mit Auszahlung $(2, 1)$ bzw. $(1, 2)$ und in gemischten Strategien zusätzlich das Gleichgewicht

$$((B \mapsto \frac{1}{3}, S \mapsto \frac{2}{3}), (B \mapsto \frac{2}{3}, S \mapsto \frac{1}{3}))$$

mit Auszahlung $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Bei einer gemeinsamen fairen Münze kann das Auszahlungsprofil $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ erreicht werden, wenn beide Spieler bei „Kopf“ die Strategie Bach und bei „Zahl“ die Strategie Strawinsky spielen.

Weitere Idee: Nicht alle Zufallsergebnisse sind sofort sichtbar. Nach Formalisierung dieser Idee kann man zeigen, dass es für alle Nash-Gleichgewichte auch äquivalente korrelierte Gleichgewichte gibt, und dass man unter Umständen mit korrelierten Gleichgewichten höhere Auszahlungen bekommen kann.

3.3 Evolutionäre Gleichgewichte

Idee: die Spieler sind biologische Organismen, die derselben Art angehören und denen verschiedene Strategien zur Verfügung stehen. Die Aktionsauswahl wird durch die „Natur“ (Vererbung, Mutation) getroffen. Der Nutzen entspricht den Überlebenschancen eines Individuums.

Es soll die Frage beantwortet werden, ob es Strategien gibt, die in dem Sinne „evolutionär stabil“ sind, dass sie ein stabiles Gleichgewicht in der Population herstellen, in dem Mutationen „unattraktiv“ sind.

Bei der spieltheoretischen Modellierung betrachten wir nur Zwei-Personenspiele, die für die „Begegnung“ zweier Individuen stehen, d.h. $N = \{1,2\}$. Die Tatsache, dass die Individuen derselben Art angehören, wird dadurch modelliert, dass $A_1 = A_2$ und $u_1(a,b) = u_2(b,a)$ (schreibe deshalb kurz $u := u_1$). Gemischte Strategien entsprechen gemischten Populationen.

Eine Strategie $b^* \in B$ ist evolutionär stabil, wenn sie gegen Mutationen resistent ist. Wenn ein kleiner Anteil $\varepsilon > 0$ an Individuen mutiert, d.h. $b \in B \setminus \{b^*\}$ wählt, soll sich trotzdem b^* durchsetzen:

$$\overbrace{\underbrace{(1-\varepsilon)u(b,b^*)}_{\text{M vs. R}} + \underbrace{\varepsilon u(b,b)}_{\text{M vs. M}}}^{U_M \text{ Mutant}} < \overbrace{\underbrace{(1-\varepsilon)u(b^*,b^*)}_{\text{R vs. R}} + \underbrace{\varepsilon u(b^*,b)}_{\text{R vs. M}}}^{U_R \text{ Rein}}.$$

Für kleines ε ist das äquivalent zu

$$u(b,b^*) < u(b^*,b^*) \quad \text{oder} \quad [u(b,b^*) = u(b^*,b^*) \text{ und } u(b,b) < u(b^*,b)]$$

Definition 40 (Symmetrisches strategisches Spiel). Ein strategisches Spiel mit zwei Spielern $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ heißt **symmetrisch**, falls $A_1 = A_2$ und $u_1(a,b) = u_2(b,a)$ für alle $a, b \in A_1$ gilt. $B := A_1 (= A_2)$ heißt Aktionsmenge von G, $u := u_1$ heißt Nutzen- oder Auszahlungsfunktion von G.

Definition 41 (Evolutionär stabile Strategie). Sei G ein symmetrisches strategisches Spiel mit Aktionsmenge B und Nutzenfunktion u. Eine Strategie $b^* \in B$ heißt **evolutionär stabil**, falls

- (b^*, b^*) ein Nash-Gleichgewicht von G ist und
- für alle besten Antworten $b \in B$ auf b^* mit $b \neq b^*$ gilt $u(b,b) < u(b^*,b)$.

Beispiel 42. Falke-oder-Taube-Spiel mit reellem Parameter $c > 0$ für Verlust bei einem Kampf.

	T	F
T	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$0, 1$
F	$1, 0$	$\frac{1}{2}(1-c), \frac{1}{2}(1-c)$

Hat dieses Spiel evolutionär stabile Strategien? Bestimme dazu in einem ersten Schritt alle symmetrischen Nash-Gleichgewichte (b^*, b^*) und untersuche diese in einem zweiten Schritt darauf, ob sie die „Mutanten-Eigenschaft“ erfüllen, d.h. ob für alle abweichenden besten Antworten b gilt, dass $u(b,b) < u(b^*,b)$.

Zur Bestimmung der symmetrischen Nash-Gleichgewichte:

1. reine gegen reine Strategie: (T,T) ist kein Nash-Gleichgewicht, (T,F) und (F,T) sind genau dann Nash-Gleichgewichte, wenn $c \geq 1$, hier aber uninteressant, weil sie nicht symmetrisch sind, und (F,F) ist ein Nash-Gleichgewicht genau dann, wenn $c \leq 1$. F ist also unser erster Kandidat für eine evolutionär stabile Strategie.