Satz 6 (Fixpunktsatz von Kakutani). *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere, kompakte und konvexe Menge und sei außerdem $f : X \to \mathrm{Pot}(X)$ eine ober-hemi-stetige Korrespondenz, so dass für jedes $x \in X$ die Menge $f(x) \subseteq X$ nicht-leer und konvex ist. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in X$ mit $x \in f(x)$.*

Beweis. vgl. z. B. [Heu04, Abschnitt 232]. □

Beweis des Satzes von Nash. Zeige, dass der Fixpunktsatz von Kakutani mit $\times_i \Delta(A_i)$ für X und B für f anwendbar ist.

1. $\times_i \Delta(A_i)$ ist nicht-leer, konvex und kompakt: Ein Profil von gemischten Strategien zu G ist durch $M := \sum_{i \in N} |A_i|$ nicht-negative reelle Zahlen gegeben, so dass sich die Zahlen, die den Aktionen eines Spielers entsprechen, zu 1 addieren.

   Wir interpretieren die Menge der gemischten Strategieprofile für G, symbolisch $\mathcal{A} := \times_{i \in N} \Delta(A_i)$, als Teilmenge des $\mathbb{R}^M$. Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ nicht-leer, kompakt und konvex ist.

   Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Spieler mit natürlichen Zahlen bezeichnet, d. h. $N = \{1, \ldots, n\}$.

   $\mathcal{A}$ ist nicht-leer, da $\mathcal{A}$ z. B. das Tupel $(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{|A_1|-1 \text{ mal}}, \ldots, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{|A_n|-1 \text{ mal}})$ enthält.

   $\mathcal{A}$ ist beschränkt, da keines der Elemente negativ oder größer als 1 sein kann. $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen, denn wenn in einer konvergenten Folge von Elementen von $\mathcal{A}$ alle Elemente der Folge nicht-negativ und durch 1 beschränkt sind und sich die zu einem Spieler gehörenden Wahrscheinlichkeiten zu 1 addieren, dann muss dies auch für den Grenzwert gelten. Ansonsten enthält man unmittelbar einen Widerspruch dazu, dass Grenzwerte Häufungspunkte sein müssen. Da $\mathcal{A}$ beschränkt und abgeschlossen ist, ist $\mathcal{A}$ kompakt.

   Seien schließlich $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ und $t \in [0, 1]$. Betrachte $\gamma = t\alpha + (1-t)\beta$. Es gilt: $\min \gamma = \min(t\alpha + (1-t)\beta) \geq t \min \alpha + (1-t) \min \beta \geq t \cdot 0 + (1-t) \cdot 0 = 0$, und analog $\max \gamma \leq 1$.

   Seien $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ und $\tilde{\gamma}$ die Abschnitte von α, β und γ, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Spieler i bestimmen. Dann gilt $\sum \tilde{\gamma} = \sum (t\tilde{\alpha} + (1-t)\tilde{\beta}) = t \sum \tilde{\alpha} + (1-t) \sum \tilde{\beta} = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$. Also summieren sich die zusammengehörigen Wahrscheinlichkeiten in γ zu 1. Zusammen folgt $\gamma \in \mathcal{A}$, also ist $\mathcal{A}$ auch konvex.

2. $B(\alpha)$ ist nicht-leer: U_i ist für festes α_{-i} linear in der gemischten Strategie von Spieler i, d.h. für $\beta_i, \gamma_i \in \Delta(A_i)$ gilt

   $$U_i(\alpha_{-i}, \lambda\beta_i + (1-\lambda)\gamma_i) = \lambda U_i(\alpha_{-i}, \beta_i) + (1-\lambda) U_i(\alpha_{-i}, \gamma_i) \qquad \text{für } \lambda \in [0, 1] \quad (3.1)$$

   Eine mögliche Interpretation der Linearität ist es, dass man eine Metamischung spielt, d.h. mit Wahrscheinlichkeit λ spielt man β_i und mit Wahrscheinlichkeit $(1-\lambda)$ spielt man γ_i.

   Daraus folgt, dass U_i stetig auf $\Delta(A_i)$ ist. Stetige Funktionen auf kompakten Mengen haben ihr Maximum in der Menge. Also ist jedes $B_i(\alpha_{-i})$ und damit auch $B(\alpha)$ eine nicht-leere Menge.

3. $B(\alpha)$ ist konvex, da $B_i(\alpha_i)$ konvex ist: seien $\alpha_i', \alpha_i'' \in B_i(\alpha_{-i})$, d.h.
$$U_i(\alpha_{-i}, \alpha_i') = U_i(\alpha_{-i}, \alpha_i'').$$
Wegen Gleichung 3.1 gilt dann auch
$$\lambda\alpha_i' + (1-\lambda)\alpha_i'' \in B_i(\alpha_{-i}).$$

4. Es ist noch zu zeigen, dass B ober-hemi-stetig ist. Sei (α^n, β^n) eine Folge in Graph(B) mit $\lim_{n\to\infty}(\alpha^n, \beta^n) = (\alpha, \beta)$; $\alpha^n, \beta^n, \alpha, \beta \in \times_i \Delta(A_i)$ und $\beta^n \in B(\alpha^n)$. Zeige, dass dann $(\alpha, \beta) \in$ Graph(B):

   Es gilt für alle $i \in N$:
$$\begin{aligned}
U_i(\alpha_{-i}, \beta_i) &\overset{\text{Def. } \alpha,\ \beta}{=} U_i(\lim_{n\to\infty}(\alpha_{-i}^n, \beta_i^n)) \\
&\overset{\text{Stetigkeit}}{=} \lim_{n\to\infty} U_i(\alpha_{-i}^n, \beta_i^n) \\
&\overset{\beta_i^n \text{ beste Antwort auf } \alpha_{-i}^n}{\geq} \lim_{n\to\infty} U_i(\alpha_{-i}^n, \beta_i') \qquad \text{für alle } \beta_i' \in \Delta(A_i) \\
&\overset{\text{Stetigkeit}}{=} U_i(\lim_{n\to\infty} \alpha_{-i}^n, \beta_i') \qquad \text{für alle } \beta_i' \in \Delta(A_i) \\
&\overset{\text{Def. } \alpha_i}{=} U_i(\alpha_{-i}, \beta_i') \qquad \text{für alle } \beta_i' \in \Delta(A_i)
\end{aligned}$$

   Also ist β_i eine beste Antwort auf α_{-i} für alle $i \in N$, damit $\beta \in B(\alpha)$ und schließlich $(\alpha, \beta) \in$ Graph(B).

□

Satz 7 (Verallgemeinerung des Satzes von Nash). *Sei $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ein strategisches Spiel, so dass für jedes $i \in N$*

1. *A_i eine nicht-leere, konvexe und kompakte Menge und*
2. *u_i stetig in A und quasi-konkav in A_i ist.*

Dann besitzt G ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien.

Beweisidee. Ähnlich wie Beweis des Satzes von Nash. Beachte, dass die Quasi-Konkavität von u_i die Konvexität der Mengen der besten Antworten impliziert. □

Lemma 8. *Sei $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ein endliches strategisches Spiel. Dann ist $\alpha^* \in \times_{i\in N} \Delta(A_i)$ ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien gdw. für jeden Spieler $i \in N$ jede reine Strategie aus der Unterstützungsmenge von α_i^* eine beste Antwort auf α_{-i}^* ist.*

Für den einzelnen Spieler ist es also – wenn die anderen Spieler ihre gemischten Strategien beibehalten – egal, ob er seine gemischte Strategie oder eine Einzelaktion daraus spielt.

Beweis. Sei zunächst α^* ein Nash-Gleichgewicht mit $a_i \in supp(\alpha_i^*)$. Angenommen, a_i ist keine beste Antwort auf α_{-i}^*. Wegen der Linearität von U_i kann Spieler i seine Auszahlung verbessern, indem er Gewicht von a_i auf andere Aktionen in $supp(\alpha_i^*)$ verteilt. Also war α_i^* keine beste Antwort und somit im Widerspruch zur Voraussetzung α^* kein Nash-Gleichgewicht.