3 Gemischte und korrelierte Strategien

3.1 Überblick

Im letzten Kapitel hat sich gezeigt, dass nicht in jedem Spiel ein Nash-Gleichgewicht existieren muss (vgl. etwa Matching-Pennies-Spiel). Was kann man in solchen Situationen tun? Idee: randomisierte Strategien.

Definition 29 (Gemischte Strategie). Sei $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ ein strategisches Spiel.

Sei $\Delta(A_i)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen über der Menge A_i. Ein $\alpha_i \in \Delta(A_i)$ ist eine **gemischte Strategie** in G, $\alpha_i(a_i)$ die Wahrscheinlichkeit für die Wahl von $a_i \in A_i$.

Ein Profil $(\alpha_i)_{i \in N} \in \times_{i \in N} \Delta(A_i)$ induziert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $A = \times_{i \in N} A_i$ durch

$$p(a) := \prod_{i \in N} \alpha_i(a_i).$$

Für $A' \subseteq A$ sei

$$p(A') := \sum_{a \in A'} p(a) = \sum_{a \in A'} \prod_{i \in N} \alpha_i(a_i).$$

Beispiel 30. Gemischte Strategie im Matching-Pennies-Spiel:

	Kopf	Zahl
Kopf	$1, -1$	$-1, \ \ 1$
Zahl	$-1, \ \ 1$	$1, -1$

Für Spieler 1 betrachte die gemischte Strategie $\alpha_1 \in \Delta(\{K, Z\})$ mit

$$\alpha_1(K) = \frac{2}{3} \text{ und } \alpha_1(Z) = \frac{1}{3}.$$

Für Spieler 2 betrachte die gemischte Strategie $\alpha_2 \in \Delta(\{K, Z\})$ mit

$$\alpha_2(K) = \frac{1}{3} \text{ und } \alpha_2(Z) = \frac{2}{3}.$$

Die induzierte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\{ K, Z \}^2$ ist

$$
\begin{aligned}
p(K,K) &= \alpha_1(K) \cdot \alpha_2(K) = \frac{2}{9} & u_1(K,K) &= +1 \\
p(K,Z) &= \alpha_1(K) \cdot \alpha_2(Z) = \frac{4}{9} & u_1(K,Z) &= -1 \\
p(Z,K) &= \alpha_1(Z) \cdot \alpha_2(K) = \frac{1}{9} & u_1(Z,K) &= -1 \\
p(Z,Z) &= \alpha_1(Z) \cdot \alpha_2(Z) = \frac{2}{9} & u_1(Z,Z) &= +1.
\end{aligned}
$$

Definition 31 (Erwarteter Nutzen). Sei $\alpha \in \times_{i \in N} \Delta(A_i)$. Der **erwartete Nutzen** von α für Spieler i ist definiert als

$$U_i(\alpha) = U_i((\alpha_j)_{j \in N}) := \sum_{a \in A} \underbrace{\left(\prod_{j \in N} \alpha_j(a_j) \right)}_{=p(a)} u_i(a).$$

Beispiel 32. In Beispiel 30 sind der erwartete Nutzen für Spieler 1 und Spieler 2

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{9} \text{ und } U_2(\alpha_1, \alpha_2) = +\frac{1}{9}.$$

Definition 33 (Unterstützungsmenge). Sei α_i eine gemischte Strategie. Die **Unterstützungsmenge** (**support**) von α_i ist die Menge

$$supp(\alpha_i) = \{ a_i \in A_i \mid \alpha_i(a_i) > 0 \}.$$

Definition 34 (Gemischte Erweiterung). Die **gemischte Erweiterung** eines strategischen Spiels $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ ist das Spiel $\langle N, (\Delta(A_i)), (U_i) \rangle$, in dem $\Delta(A_i)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen über den Aktionen A_i ist und $U_i : \times_{j \in N} \Delta(A_j) \to \mathbb{R}$ jedem $\alpha \in \times \Delta_{j \in N}(A_j)$ den erwarteten Nutzen für Spieler i unter der von α induzierten Wahrscheinlichkeitsverteilung zuordnet.

Definition 35 (Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien). Sei G ein strategisches Spiel. Ein **Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien** von G ist ein Nash-Gleichgewicht der gemischten Erweiterung von G.

Satz 5 (Satz von Nash). *Jedes endliche strategische Spiel hat ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.*

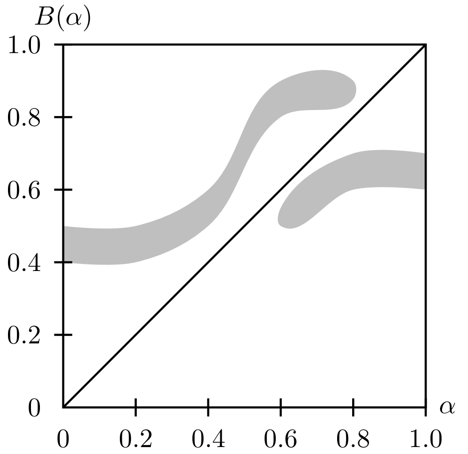
Beweisskizze. Betrachte die mengenwertige Funktion (Korrespondenz) der besten Antworten $B : \mathbb{R}^{\sum_i |A_i|} \to \text{Pot}(\mathbb{R}^{\sum_i |A_i|})$ mit

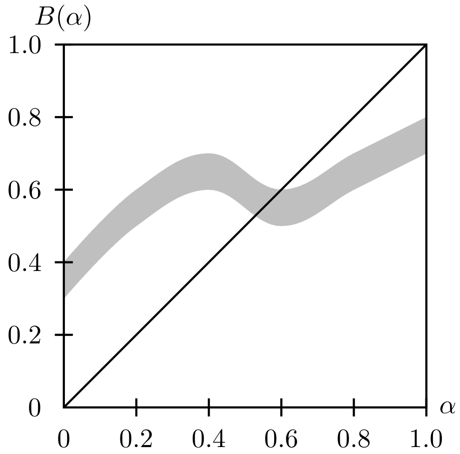
$$B(\alpha) = \bigtimes_{i \in N} B_i(\alpha_{-i}).$$

Ein gemischtes Strategieprofil α ist Fixpunkt der Korrespondenz B gdw. $\alpha \in B(\alpha)$ gdw. α ein Nash-Gleichgewicht ist.

Der Graph der Korrespondenz sollte zusammenhängend sein. Dann liegen Punkte auf der Fixpunktdiagonalen. $\square$

In der ersten der beiden folgenden Abbildungen ist der Graph der Korrespondenz nicht zusammenhängend und es liegen keine Punkte auf der Fixpunktdiagonalen. Der zweite Graph ist dagegen zusammenhängend und die Korrespondenz besitzt Fixpunkte.





Definition 36. Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt**, wenn sie

1. beschränkt ist, d.h. es in jeder Dimension obere und untere Schranken gibt und
2. abgeschlossen ist, d.h. wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge von Elementen aus X selbst in X liegt.

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn für alle $x, y \in X$ und beliebiges $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in X.$$

Eine Korrespondenz $f : X \to \mathrm{Pot}(X)$ heißt **ober-hemi-stetig**, falls ihr Graph

$$\mathrm{Graph}(f) = \{\, (x, y) \mid x \in X,\ y \in f(x) \,\}$$

eine abgeschlossene Menge ist.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **quasi-konkav**, falls für alle $z \in \mathbb{R}$ die Menge $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq z \,\}$ konvex ist.

Die erste der beiden unten abgebildeten Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist quasikonkav, die zweite nicht.