

2 Strategische Spiele

Da $A_i = A'_i \cup \{a_i\}$ ist und $a_i^{'*}$ unter den Strategien in A'_i eine beste Antwort auf $a_{-i}^{'*}$ ist, müssen wir nur zeigen, dass a_i keine bessere Antwort ist. Dies folgt daraus, dass einerseits $u_i(a_i^{*}) = u_i(a_{-i}^{*}, a_i^{*}) \geq u_i(a_{-i}^{*}, a_i^+)$ (da a_i^{*} ein Nash-Gleichgewicht in G' ist und $a_i^+ \in A'_i$ ist) und andererseits $u_i(a_i^{*}, a_i) < u_i(a_{-i}^{*}, a_i^+)$ (da a_i von a_i^+ dominiert wird) gilt. Also ist a_i^{*} auch ein Nash-Gleichgewicht von G . \square

Satz 2. *Wenn ein strategisches Spiel sich durch die Methode der iterativen Eliminierung eindeutig lösen lässt, so ist das resultierende Strategieprofil ein Nash-Gleichgewicht, und zwar das einzige Nash-Gleichgewicht in diesem Spiel.*

Beweis. Mehrfache Anwendung von Lemma 1 (Induktion) ergibt, dass zwei Spiele G und G' dieselben Nash-Gleichgewichte besitzen, wenn G' aus G durch iterative Eliminierung entsteht.

Liefert nun das Verfahren der iterativen Eliminierung, ausgehend von G , das Spiel G' als eindeutige Lösung, so hat in G' jeder Spieler nur eine Strategie. Das einzig mögliche Strategieprofil in G' ist automatisch ein Nash-Gleichgewicht in G' , und zwar das einzige. Da G und G' dieselben Nash-Gleichgewichte besitzen, folgt die Behauptung. \square

2.2.2 Existenz und Eindeutigkeit von Nash-Gleichgewichten

1. Existiert immer ein Nash-Gleichgewicht? Nein. Es existiert jedoch bei endlichen Spielen immer ein Nash-Gleichgewicht, wenn wir Strategien randomisieren.
2. Sind die Nash-Gleichgewichte eindeutig? Nein.
3. Sind Nash-Gleichgewichte einfach zu berechnen? Im Matrixfall ja, vermutlich nein für randomisierte Spiele.

2.3 Strikt kompetitive Spiele und Maximin-Strategien

Definition 24 (Strikt kompetitive oder Nullsummen-Spiele). Ein **Strikt kompetitives Spiel** oder **Nullsummen-Spiel** ist ein strategisches Spiel $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ mit

$$u_1(a) = -u_2(a) \quad \text{für alle } a \in A.$$

Beispiel 25. Matching Pennies:

	Kopf	Zahl
Kopf	1, -1	-1, 1
Zahl	-1, 1	1, -1

Beispiel 26. Ein Spiel mit je drei Aktionen pro Spieler:

2 Strategische Spiele

	L	M	R
T	8, -8	3, -3	-6, 6
M	2, -2	-1, 1	3, -3
B	-6, 6	4, -4	8, -8

Es existiert kein Nash-Gleichgewicht, denn alles, was dem einen Spieler nutzt, schadet dem anderen und umgekehrt. Versuche also, den eigenen Schaden zu minimieren.

Bestimme etwa für Spieler 1 Zeilenminimum des Nutzens, d.h. den Nutzen, den Spieler 1 sicher hat, wenn er die der Zeile entsprechende Aktion wählt, hier also $(-6; -1; -6)^t$. Also entscheidet sich der Rationale/Paranoide für M, wenn er über die Minima maximiert. Für Spieler 2 erhält man $(-8; -4; -8)$. Dieses Vorgehen ist für Paranoiker/Pessimisten in Ordnung, aber wenn man anfängt zu überlegen, dass der andere Spieler genau so denkt, . . . , also kein Nash-Gleichgewicht. Aber angenommen es gibt ein Nash-Gleichgewicht, dann wird dieses mit Maximinimierer erreicht, wie wir gleich sehen werden.

Definition 27 (Maximinimierer). Sei $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein Nullsummenspiel. Eine Aktion $x^* \in A_1$ heißt **Maximinimierer (MM)** für Spieler 1 in G , falls

$$\min_{y \in A_2} u_1(x^*, y) \geq \min_{y \in A_2} u_1(x, y) \quad \text{für alle } x \in A_1$$

und $y^* \in A_2$ heißt Maximinimierer für Spieler 2 in G falls

$$\min_{x \in A_1} u_2(x, y^*) \geq \min_{x \in A_1} u_2(x, y) \quad \text{für alle } y \in A_2.$$

Bei unendlichen Spielen ersetze in der Definition Maximum durch Supremum und Minimum durch Infimum.

Bemerkung 28. Wenn ein Nash-Gleichgewicht in einem Nullsummenspiel existiert, so ist dies eine Kombination von Maximinimierern. (vgl. Satz 4 und Beweis dazu.)

Lemma 3. Sei $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein Nullsummenspiel. Dann gilt

$$\max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x, y) = - \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y)$$

Beweis. Es gilt für beliebiges reellwertiges f

$$\min_z (-f(z)) = - \max_z (f(z)). \tag{2.1}$$

Damit gilt für alle $y \in A_2$

$$\begin{aligned} - \min_{x \in A_1} u_2(x, y) &\stackrel{2.1}{=} \max_{x \in A_1} (-u_2(x, y)) \\ &= \max_{x \in A_1} (u_1(x, y)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

2 Strategische Spiele

Schließlich erhält man

$$\begin{aligned} \max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x, y) &\stackrel{2.1}{=} - \min_{y \in A_2} - [\min_{x \in A_1} u_2(x, y)] \\ &\stackrel{2.2}{=} - \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y). \end{aligned}$$

□

Satz 4. Sei $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein Nullsummenspiel. Dann:

1. Falls (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht von G ist, dann sind x^* und y^* Maximinimierer für Spieler 1 bzw. Spieler 2.
2. Falls, (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht ist, dann gilt:

$$\max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y) = u_1(x^*, y^*)$$

3. Falls $\max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y)$ und x^* und y^* Maximinimierer von Spieler 1 bzw. Spieler 2 sind, dann ist (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht.

Beweis. 1. Sei (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht. Nach der Definition von Nash-Gleichgewichten ist $u_2(x^*, y^*) \geq u_2(x^*, y)$ für alle $y \in A_2$. Wegen $u_1 = -u_2$ folgt $u_1(x^*, y^*) \leq u_1(x^*, y)$ für alle $y \in A_2$. Also

$$\begin{aligned} u_1(x^*, y^*) &= \min_{y \in A_2} u_1(x^*, y) \\ &\leq \max_{x \in A_1} \min_{y \in A_2} u_1(x, y) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Außerdem gilt nach der Definition eines Nash-Gleichgewichtes aus der Perspektive von Spieler 1, dass $u_1(x^*, y^*) \geq u_1(x, y^*)$ für alle $x \in A_1$, also $u_1(x^*, y^*) \geq \min_{y \in A_2} u_1(x, y)$ für alle $x \in A_1$. Damit gilt auch $u_1(x^*, y^*) \geq \max_{x \in A_1} \min_{y \in A_2} u_1(x, y)$. Zusammen mit Ungleichung 2.3 folgt daraus

$$u_1(x^*, y^*) = \max_{x \in A_1} \min_{y \in A_2} u_1(x, y) \tag{2.4}$$

Also ist x^* ein Maximinimierer.

Analog erhält man für Spieler 2, dass y^* ein Maximinimierer ist:

$$u_2(x^*, y^*) = \max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x, y) \tag{2.5}$$

2. Aus Gleichung 2.5 folgt mit Lemma 3, dass $u_2(x^*, y^*) = - \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y)$ und daraus wegen $u_1 = -u_2$, dass $u_1(x^*, y^*) = \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y)$. Zusammen mit Gleichung 2.4 erhält man

$$u_1(x^*, y^*) = \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y) = \max_{x \in A_1} \min_{y \in A_2} u_1(x, y).$$

Insbesondere folgt daraus, dass alle Nash-Gleichgewichte für alle Spieler denselben Nutzen haben.

2 Strategische Spiele

3. Seien x^* und y^* Maximinierer von Spieler 1 bzw. Spieler 2 und gelte $\max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y) =: v^*$. Wegen Lemma 3 ist $-v^* = \max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x, y)$. Damit und da x^* und y^* Maximinierer sind, gilt

$$u_1(x^*, y) \geq v^* \text{ für alle } y \in A_2 \text{ bzw.} \quad (2.6)$$

$$u_2(x, y^*) \geq -v^* \text{ für alle } x \in A_1 \quad (2.7)$$

Insbesondere gilt für $x = x^*$ und $y = y^*$: $u_1(x^*, y^*) \geq v^*$ und $u_2(x^*, y^*) \geq -v^*$. Aus der letzten Ungleichung erhält man wegen $u_1 = -u_2$, dass $u_1(x^*, y^*) \leq v^*$, insgesamt also $u_1(x^*, y^*) = v^*$.

Wegen Ungleichung 2.6 gilt $u_1(x^*, y) \geq u_1(x^*, y^*)$ für alle $y \in A_2$ bzw. wegen $u_1 = -u_2$ äquivalent $u_2(x^*, y) \leq u_2(x^*, y^*)$ für alle $y \in A_2$, d.h. y^* ist eine beste Antwort auf x^* .

Analog erhält man wegen Ungleichung 2.7 $u_1(x, y^*) \leq u_1(x^*, y^*)$ für alle $x \in A_1$, d.h. auch x^* ist eine beste Antwort auf y^* . Damit ist (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht.

Insgesamt folgt, dass man, wenn es mehrere Nash-Gleichgewichte gibt, sich immer ein beliebiges aussuchen kann, da alle den gleichen Nutzen liefern. \square

Beachte, dass strikt kompetitive Spiele im Wesentlichen für Brettspiele interessant sind, jedoch nicht für die Wirtschaft.