> Wenn Spieler i den Zuschlag nicht erhält, dann ist $u_i(a) = 0$. Spieler i erhält in a den Zuschlag, wenn $a_i = \max a$ gilt und i die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Bei gleichen Geboten wird also der Spieler mit dem niedrigsten Index bevorzugt.

Eine schwach dominante Strategie für Spieler i besteht darin, v_i zu bieten. Für den Beweis der schwachen Dominanz ist zu zeigen, dass v_i eine beste Antwort auf alle Aktionsprofile a_{-i} der anderen Spieler ist und es zu jedem anderen Gebot a_i mindestens ein Profil a_{-i} gibt, auf das v_i eine echt bessere Antwort ist als a_i.

Für die zweite Eigenschaft sehen wir, dass v_i echt besser ist als $a_i \neq v_i$, wenn alle anderen Spieler $\frac{1}{2}(v_i + a_i)$ bieten.

Für die erste Eigenschaft unterscheiden wir zwei Fälle: Erhält Spieler i in $a = (a_{-i}, v_i)$ den Zuschlag, ergibt sich $v_i \geq \max a_{-i}$ und somit $u_i(a) = v_i - \max a_{-i} \geq 0$, also ein nichtnegativer Nutzen. Eine bessere Strategie gibt es nicht: Ohne den Zuschlag hätte i den Nutzen 0, und andere Strategien, die zum Zuschlag führen, bieten denselben Nutzen.

Erhält Spieler i in $a = (a_{-i}, v_i)$ nicht den Zuschlag, so ergibt sich ein Nutzen von 0. Wiederum geht es nicht besser: Andere Strategien, die nicht zum Zuschlag führen, haben den Nutzen 0, und Strategien, die zum Zuschlag führen, haben einen Nutzen von höchstens 0, da $\max a_{-i} \geq v_i$ ist (sonst hätte Spieler i bereits mit dem Gebot v_i den Zuschlag erhalten). Somit ist v_i in jedem Fall eine beste Antwort.

Ein Profil schwach dominanter Strategien a^* bildet stets ein Nash-Gleichgewicht: Da eine schwach dominante Strategie eine beste Antwort auf *alle* Strategieprofile ist, ist a_i^* insbesondere für jeden Spieler i eine beste Antwort auf a_{-i}^*.

2.2.1 Iterative Eliminierung und Nash-Gleichgewichte

Lemma 1. *Seien $G = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ und $G' = \langle N, (A'_i)_{i \in N}, (u'_i)_{i \in N} \rangle$ strategische Spiele, so dass G' aus G durch Elimination* einer *strikt dominierten Strategie entsteht. Dann gilt: a^* ist ein Nash-Gleichgewicht von G genau dann, wenn a^* ein Nash-Gleichgewicht von G' ist.*

Beweis. Sei a_i die Strategie für Spieler i, die beim Übergang von G zu G' eliminiert wird. Es gibt also eine Strategie $a_i^+ \in A_i$, so dass $u_i(a_{-i}, a_i) < u_i(a_{-i}, a_i^+)$ für alle $a_{-i} \in A_{-i}$.

Sei zuerst a^* ein Nash-Gleichgewicht von G. Dann ist a_i^* eine beste Antwort auf a_{-i}^*, es gilt also $u_i(a^*) = u_i(a_{-i}^*, a_i^*) \geq u_i(a_{-i}^*, a'_i)$ für alle $a'_i \in A_i$, also insbesondere $u_i(a_{-i}^*, a_i^*) \geq u_i(a_{-i}^*, a_i^+)$. Da aufgrund der strikten Dominanz $u_i(a_{-i}^*, a_i) < u_i(a_{-i}^*, a_i^+)$ gilt, muss $a_i^* \neq a_i$ sein.

Die Gleichgewichtsstrategien a_j^* werden beim Übergang zu G' also nicht eliminiert. Für alle Spieler $j \in N$ ist a_j^* in G eine beste Antwort auf a_{-j}^*. Wegen $A'_j \subseteq A_j$ gilt dies dann natürlich auch in G'. Somit ist a^* auch ein Nash-Gleichgewicht von G'.

Sei umgekehrt a'^* ein Nash-Gleichgewicht von G'. Zu zeigen ist, dass a'^* auch ein Nash-Gleichgewicht von G ist. Da für alle Spieler j die Beziehung $A_j \supseteq A'_j$ gilt, ist dazu nur zu zeigen, dass a'^*_i auch in G eine beste Antwort auf a'^*_{-i} ist. Für Spieler $j \neq i$ muss a'^*_j eine beste Antwort auf a'^*_{-j} sein, da $A_j = A'_j$ gilt und somit die Bedingungen für G und G' identisch sind.

Da $A_i = A'_i \cup \{a_i\}$ ist und a'^*_i unter den Strategien in A'_i eine beste Antwort auf a'^*_{-i} ist, müssen wir nur zeigen, dass a_i keine bessere Antwort ist. Dies folgt daraus, dass einerseits $u_i(a'^*) = u_i(a'^*_{-i}, a'^*_i) \geq u_i(a^*_{-i}, a^+_i)$ (da a'^* ein Nash-Gleichgewicht in G' ist und $a^+_i \in A'_i$ ist) und andererseits $u_i(a'^*_{-i}, a_i) < u_i(a'^*_{-i}, a^+_i)$ (da a_i von a^+_i dominiert wird) gilt. Also ist a'^* auch ein Nash-Gleichgewicht von G. □

Satz 2. *Wenn ein strategisches Spiel sich durch die Methode der iterativen Eliminierung eindeutig lösen lässt, so ist das resultierende Strategieprofil ein Nash-Gleichgewicht, und zwar das einzige Nash-Gleichgewicht in diesem Spiel.*

Beweis. Mehrfache Anwendung von Lemma 1 (Induktion) ergibt, dass zwei Spiele G und G' dieselben Nash-Gleichgewichte besitzen, wenn G' aus G durch iterative Eliminierung entsteht.

Liefert nun das Verfahren der iterativen Eliminierung, ausgehend von G, das Spiel G' als eindeutige Lösung, so hat in G' jeder Spieler nur eine Strategie. Das einzig mögliche Strategieprofil in G' ist automatisch ein Nash-Gleichgewicht in G', und zwar das einzige. Da G und G' dieselben Nash-Gleichgewichte besitzen, folgt die Behauptung. □

2.2.2 Existenz und Eindeutigkeit von Nash-Gleichgewichten

1. Existiert immer ein Nash-Gleichgewicht? Nein. Es existiert jedoch bei endlichen Spielen immer ein Nash-Gleichgewicht, wenn wir Strategien randomisieren.
2. Sind die Nash-Gleichgewichte eindeutig? Nein.
3. Sind Nash-Gleichgewichte einfach zu berechnen? Im Matrixfall ja, vermutlich nein für randomisierte Spiele.

2.3 Strikt kompetitive Spiele und Maximin-Strategien

Definition 24 (Strikt kompetitive oder Nullsummen-Spiele). Ein **Strikt kompetitives Spiel** oder **Nullsummen-Spiel** ist ein strategisches Spiel $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ mit

$$u_1(a) = -u_2(a) \qquad \text{für alle } a \in A.$$

Beispiel 25. Matching Pennies:

	Kopf	Zahl
Kopf	$1, -1$	$-1, \ 1$
Zahl	$-1, \ 1$	$1, -1$

Beispiel 26. Ein Spiel mit je drei Aktionen pro Spieler: