| | L | R |
|---|---|---|
| T | $2, 1$ | $0, 0$ |
| M | $2, 1$ | $1, 1$ |
| B | $0, 0$ | $1, 1$ |

Eliminiert man zuerst T ($\leq$ M), dann L ($\leq R$), so hat jedes noch mögliche Ergebnis (RM oder RB) das Nutzenprofil $(1, 1)$. Die alternative Reihenfolge, bei der zuerst B ($\leq$ M), dann R ($\leq L$) eliminiert wird, führt hingegen zu dem Nutzenprofil $(2, 1)$.

## 2.2 Nash-Gleichgewichte

Nash-Gleichgewichte sind das meistbenutzte Lösungskonzept der Spieltheorie. Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Strategiekombination, in der kein Spieler durch Abweichung einen Vorteil erlangen kann.

**Beispiel 17.** Nash-Gleichgewichte bei Bach oder Strawinsky:

| | | Strawinsky-Fan | |
|---|---|---|---|
| | | B | S |
| Bach-Fan | B | $2, 1$ | $0, 0$ |
| | S | $0, 0$ | $1, 2$ |

Hier existieren zwei Nashgleichgewichte, nämlich (B, B) und (S, S).

**Definition 18 (Nash-Gleichgewicht).** Ein **Nash-Gleichgewicht (NG)** eines strategischen Spieles $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ist ein Profil $a^* \in A$ von Aktionen mit der Eigenschaft, dass für alle Spieler $i \in N$ gilt:

$$u_i(a^*) = u_i(a^*_{-i}, a^*_i) \geq u_i(a^*_{-i}, a_i) \qquad \text{für alle } a_i \in A_i.$$

**Definition 19 (Nash-Gleichgewicht, alternativ).** Sei $B_i(a_{-i})$ die Menge von Aktionen $a_i \in A_i$, die eine beste Reaktion auf $a_{-i}$ sind, d.h.

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i \mid u_i(a_{-i}, a_i) \geq u_i(a_{-i}, a'_i) \text{ für alle } a'_i \in A_i\}.$$

Ein Nash-Gleichgewicht $a^*$ ist ein Profil mit der Eigenschaft

$$a^*_i \in B_i(a^*_{-i}) \quad \text{für alle } i \in N.$$

Wir betrachten auch $B(a^*)$:

$$B(a^*) = \bigtimes_{i \in N} B_i(a^*_{-i})$$

Mit dieser Notation ist $a^*$ ein Nash-Gleichgewicht gdw. $a^* \in B(a^*)$.

**Beispiel 20.** Im Gefangenendilemma gibt es genau ein Nash-Gleichgewicht:

| | S | G |
|---|---|---|
| S | 3, 3 | 0, 4 |
| G | 4, 0 | **1, 1** |

**Beispiel 21.** Im Falke-und-Taube-Spiel gibt es zwei Nash-Gleichgewichte:

| | Taube | Falke |
|---|---|---|
| Taube | 3, 3 | **1, 4** |
| Falke | **4, 1** | 0, 0 |

**Beispiel 22.** Im Matching-Pennies-Spiel gibt es kein Nash-Gleichgewicht:

| | Kopf | Zahl |
|---|---|---|
| Kopf | 1, −1 | −1, 1 |
| Zahl | −1, 1 | 1, −1 |

**Beispiel 23 (Auktionsspiel).** Eine *Second Price Sealed Bid Auction* läuft wie folgt ab: Alle Auktionsteilnehmer geben ein geheimes Gebot für das zu versteigernde Objekt ab. Das höchste Gebot erhält den Zuschlag, wobei ein Betrag bezahlt werden muss, der dem *zweithöchsten* abgegebenen Gebot entspricht.

Formal ergibt sich folgendes Spiel $\langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$:

- $N = \{1, \ldots, n\}$, wobei $n \geq 2$. Wir schreiben $v_i \in \mathbb{R}$ für den *Wert* (in Euro), den Spieler $i$ dem zu versteigernden Objekt zumisst. Das Auktionsspiel wird durch die Werte $v_i$ parametrisiert. Wir fordern, dass $v_1 > v_2 > \cdots > v_n > 0$ gilt.
- Für alle $i \in N$ ist $A_i = \mathbb{R}^+$. Dabei entspricht $a_i \in A_i$ einem Gebot von $a_i$ Euro.
- Die Nutzenfunktionen $u_i$ sind wie folgt definiert: Erhält Spieler $i$ den Zuschlag, so ist $u_i(a) = v_i - \max a_{-i}$. Der Spieler erhält das Objekt (Nutzen $v_i$), muss aber den höchsten von den anderen Spielern gebotenen Betrag bezahlen (Ausgabe $\max a_{-i}$).

> Wenn Spieler $i$ den Zuschlag nicht erhält, dann ist $u_i(a) = 0$. Spieler $i$ erhält in $a$ den Zuschlag, wenn $a_i = \max a$ gilt und $i$ die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Bei gleichen Geboten wird also der Spieler mit dem niedrigsten Index bevorzugt.

Eine schwach dominante Strategie für Spieler $i$ besteht darin, $v_i$ zu bieten. Für den Beweis der schwachen Dominanz ist zu zeigen, dass $v_i$ eine beste Antwort auf alle Aktionsprofile $a_{-i}$ der anderen Spieler ist und es zu jedem anderen Gebot $a_i$ mindestens ein Profil $a_{-i}$ gibt, auf das $v_i$ eine echt bessere Antwort ist als $a_i$.

Für die zweite Eigenschaft sehen wir, dass $v_i$ echt besser ist als $a_i \neq v_i$, wenn alle anderen Spieler $\frac{1}{2}(v_i + a_i)$ bieten.

Für die erste Eigenschaft unterscheiden wir zwei Fälle: Erhält Spieler $i$ in $a = (a_{-i}, v_i)$ den Zuschlag, ergibt sich $v_i \geq \max a_{-i}$ und somit $u_i(a) = v_i - \max a_{-i} \geq 0$, also ein nicht-negativer Nutzen. Eine bessere Strategie gibt es nicht: Ohne den Zuschlag hätte $i$ den Nutzen 0, und andere Strategien, die zum Zuschlag führen, bieten denselben Nutzen.

Erhält Spieler $i$ in $a = (a_{-i}, v_i)$ nicht den Zuschlag, so ergibt sich ein Nutzen von 0. Wiederum geht es nicht besser: Andere Strategien, die nicht zum Zuschlag führen, haben den Nutzen 0, und Strategien, die zum Zuschlag führen, haben einen Nutzen von höchstens 0, da $\max a_{-i} \geq v_i$ ist (sonst hätte Spieler $i$ bereits mit dem Gebot $v_i$ den Zuschlag erhalten). Somit ist $v_i$ in jedem Fall eine beste Antwort.

Ein Profil schwach dominanter Strategien $a^*$ bildet stets ein Nash-Gleichgewicht: Da eine schwach dominante Strategie eine beste Antwort auf *alle* Strategieprofile ist, ist $a_i^*$ insbesondere für jeden Spieler $i$ eine beste Antwort auf $a_{-i}^*$.

### 2.2.1 Iterative Eliminierung und Nash-Gleichgewichte

**Lemma 1.** *Seien $G = \langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ und $G' = \langle N, (A'_i)_{i\in N}, (u'_i)_{i\in N}\rangle$ strategische Spiele, so dass $G'$ aus $G$ durch Elimination* einer *strikt dominierten Strategie entsteht. Dann gilt: $a^*$ ist ein Nash-Gleichgewicht von $G$ genau dann, wenn $a^*$ ein Nash-Gleichgewicht von $G'$ ist.*

*Beweis.* Sei $a_i$ die Strategie für Spieler $i$, die beim Übergang von $G$ zu $G'$ eliminiert wird. Es gibt also eine Strategie $a_i^+ \in A_i$, so dass $u_i(a_{-i}, a_i) < u_i(a_{-i}, a_i^+)$ für alle $a_{-i} \in A_{-i}$.

Sei zuerst $a^*$ ein Nash-Gleichgewicht von $G$. Dann ist $a_i^*$ eine beste Antwort auf $a_{-i}^*$, es gilt also $u_i(a^*) = u_i(a_{-i}^*, a_i^*) \geq u_i(a_{-i}^*, a'_i)$ für alle $a'_i \in A_i$, also insbesondere $u_i(a_{-i}^*, a_i^*) \geq u_i(a_{-i}^*, a_i^+)$. Da aufgrund der strikten Dominanz $u_i(a_{-i}^*, a_i) < u_i(a_{-i}^*, a_i^+)$ gilt, muss $a_i^* \neq a_i$ sein.

Die Gleichgewichtsstrategien $a_j^*$ werden beim Übergang zu $G'$ also nicht eliminiert. Für alle Spieler $j \in N$ ist $a_j^*$ in $G$ eine beste Antwort auf $a_{-j}^*$. Wegen $A'_j \subseteq A_j$ gilt dies dann natürlich auch in $G'$. Somit ist $a^*$ auch ein Nash-Gleichgewicht von $G'$.

Sei umgekehrt $a'^*$ ein Nash-Gleichgewicht von $G'$. Zu zeigen ist, dass $a'^*$ auch ein Nash-Gleichgewicht von $G$ ist. Da für alle Spieler $j$ die Beziehung $A_j \supseteq A'_j$ gilt, ist dazu nur zu zeigen, dass $a_i'^*$ auch in $G$ eine beste Antwort auf $a_{-i}'^*$ ist. Für Spieler $j \neq i$ muss $a_j'^*$ eine beste Antwort auf $a_{-j}'^*$ sein, da $A_j = A'_j$ gilt und somit die Bedingungen für $G$ und $G'$ identisch sind.