Spieltheorie

Prof. Dr. Bernhard Nebel

Assistent: Dipl.-Inf. Malte Helmert
LaTeX-Umsetzung: Ingo Thon

{nebel, helmert, thon}@informatik.uni-freiburg.de

Sommersemester 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Was ist Spieltheorie?

Spieltheorie ist die Analyse strategischer Entscheidungssituationen, in denen mehrere Spieler miteinander interagieren.

Dabei ist das Resultat eines Spiels von den Entscheidungen der Mitspieler abhängig und alle Spieler sind sich dessen bewusst. Damit stellt sich die Frage nach dem Ergebnis, das sich ergibt, falls alle Spieler „rational“ handeln, d.h. ihren (erwarteten) Nutzen maximieren, wobei sie davon ausgehen, dass ihre Mitspieler ebenso rational handeln.

Ursprünglich ist die Spieltheorie ein Gebiet der theoretischen Wirtschaftswissenschaften, neuerdings jedoch auch für Künstliche Intelligenz und Informatik von Interesse, wenn es darum geht, dezentrale, heterogene Systeme von egoistischen Agenten zu modellieren. Während Lösungsbegriffe für Spiele bereits bekannt sind, sind noch viele algorithmische Fragen zu behandeln. Da die Annahme der Rationalität im Fall von künstlichen Agenten berechtigter ist als im Fall natürlicher Agenten, ist die Spieltheorie für die Informatik unter Umständen noch sinnvoller und interessanter als für die Wirtschaftswissenschaft.

Beispiel 1 (Anflugmanagement an Flughäfen). Heute: First-come-first-served, besser wäre aber ein Anflugscheduling unter Berücksichtigung der verbleibenden Flugbenzinmengen der ankommenden Flugzeuge. Bei mehreren Fluglinien werden Online-Verhandlungen notwendig.

1.2 Gebiete der Spieltheorie

Zu den Gebieten der Spieltheorie gehören unter anderem sogenannte **strategische Spiele (Normalform-Spiele)**, bei denen die Strategien vor Beginn des Spiels festgelegt werden und das Spielergebnis aus der Strategiekombination resultiert.

Beispiel 2 (Gefangenendilemma). Zwei Gefangene werden getrennt voneinander verhört und haben die Wahl, die ihnen vorgeworfene Tat zu gestehen und dabei den anderen Gefangenen zu belasten oder zu schweigen. Mögliche Ausgänge sind dann, dass

1. beide schweigen, worauf sie mit je drei Monaten Haft bestraft werden,
2. nur einer gesteht, der andere aber schweigt, woraufhin der Kronzeuge frei kommt, während der „Schweiger“ zu zehn Jahren Haft verurteilt wird, oder dass
3. beide gestehen, was für beide eine dreijährige Haftstrafe bedeutet.

Daneben werden **extensive Spiele**, d.h. Spiele mit mehreren Zügen, wie etwa Schach oder wiederholte strategische Spiele, untersucht.

Es wird zwischen Spielen mit **vollständigen** und **unvollständigen Informationen** unterschieden, wobei etwa bei Kartenspielen den Spielern in der Regel nur unvollständige Informationen vorliegen.

Koalitions- oder Verhandlungsspiele modellieren Situationen wie Verhandlungen, Verteilungen von Gewinnen oder Wahlen.

In der **Implementierungstheorie (Mechanismusdesign)** betrachtet man Spiele nicht nur aus der Sicht der Spieler, sondern auch aus der eines „Spieledesigners“, der die Spielregeln so festlegen will, dass der Gesamtnutzen aller Spieler optimiert wird.

Die wichtigsten **Lösungskonzepte** der Spieltheorie sind die Elimination dominierter Strategien, Nash-Gleichgewichte und weitere Gleichgewichtsbegriffe.

2 Strategische Spiele

Definition 3 (Strategisches Spiel). Ein **strategisches Spiel** $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ besteht aus

- einer endlichen **Spielermenge** N,
- für jeden Spieler $i \in N$ einer nichtleeren Menge A_i (von **Aktionen/Strategien**) und
- für jeden Spieler $i \in N$ einer **Auszahlungsfunktion** $u_i : A \to \mathbb{R}$, wobei

$$A = \bigtimes_{i \in N} A_i.$$

G heißt endlich, falls A endlich ist.

Oft wird statt einer Auszahlungsfunktionen eine **Präferenzrelation** $\succeq_i$ für Spieler i genutzt:

$$a \succeq_i b \text{ gdw. } u_i(a) \geq u_i(b)$$

Endliche strategische Spiele werden oft in **Matrixform** angegeben, wie etwa das folgende Spiel mit zwei Spielern und je zwei möglichen Aktionen. Spieler 1 ist der Zeilenspieler, Spieler 2 der Spaltenspieler. Bei den Auszahlungen ist jeweils der erste Wert der Nutzen für Spieler 1, der zweite Wert der Nutzen für Spieler 2.

		Spieler 2	
		L	R
Spieler 1	T	w_1, w_2	x_1, x_2
	B	y_1, y_2	z_1, z_2

Wählt Spieler 1 Aktion T und Spieler 2 Aktion L, dann erhält Spieler 1 die Auszahlung w_1, Spieler 2 erhält die Auszahlung w_2.

Beispiel 4 (Gefangenendilemma). S sei die Strategie, zu schweigen, G die Strategie, zu gestehen. Die Auszahlungen sind in Gefängnismonaten angegeben.

	S	G
S	$-3, -3$	$-120, \quad 0$
G	$0, -120$	$-36, -36$

Beispiel 5 (Falke und Taube). Die Spieler können sich in einem Kampf (etwa um Nahrung) wie ein Falke (F) oder wie eine Taube (T) verhalten. Treffen zwei Tauben aufeinander, teilen sie sich den Nutzen, trifft ein Falke auf eine Taube, gewinnt der Falke und sichert sich einen großen Teil des Nutzens, treffen aber zwei Falken aufeinander, so geht in dem Kampf der beiden der gesamte Nutzen verloren.

	T	F
T	$3,3$	$1,4$
F	$4,1$	$0,0$

Beispiel 6 (Matching Pennies). Zwei Spieler wählen jeweils Kopf (K) oder Zahl (Z). Wählen beide das gleiche, gewinnt Spieler 1 einen Euro von Spieler 2, wählen sie etwas unterschiedliches, erhält Spieler 2 einen Euro von Spieler 1.

	K	Z
K	$1,-1$	$-1,\ \ 1$
Z	$-1,\ \ 1$	$1,-1$

Beispiel 7 (Bach oder Strawinsky). Zwei Personen wollen gemeinsam ein Konzert besuchen, wobei eine der beiden Personen Bach bevorzugt, während die andere Strawinsky vorzieht. Beiden ist es wichtiger, in das gleiche Konzert zu gehen wie der Partner, als ihr Lieblingskonzert zu besuchen. Sei B die Aktion, das Bach-Konzert zu besuchen, S die Aktion, in das Strawinsky-Konzert zu gehen.

		Strawinsky-Fan	
		B	S
Bach-Fan	B	$2,1$	$0,0$
	S	$0,0$	$1,2$

2.1 Dominierte Strategien

Notation 8. Sei $a = (a_i)_{i \in N}$ ein **Strategieprofil** ($a \in A = \bigtimes_{i \in N} A_i$). Dann ist $a_{-i} := (a_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$ und $(a_{-i}, a_i) = (a_j)_{j \in (N \setminus \{i\}) \cup \{i\}} = (a_j)_{j \in N} = a$.

Definition 9 (Strikt dominierte Strategie). Eine Aktion $a_j^* \in A_j$ im Spiel $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ heißt strikt dominiert, falls es eine Aktion $a_j' \in A_j$ gibt, so dass für alle $a \in A$ gilt:

$$u_j(a_{-j}, a_j') > u_j(a_{-j}, a_j^*)$$

Bemerkung 10. Es ist nicht rational, strikt dominierte Strategien zu spielen.

2.1.1 Iterative Elimination strikt dominierter Strategien

- Streiche die Strategien, die strikt dominiert sind, solange welche da sind.
- Bleibt nur ein Profil übrig, ist das die Lösung.

Beispiel 11. Streiche zunächst die von der zweiten Zeile strikt dominierte erste Zeile, danach die von der zweiten Spalte strikt dominierte erste Spalte:

	S	G
S	~~3,3~~	~~0,4~~
G	4,0	1,1

	S	G
G	~~4,0~~	1,1

Beispiel 12. Iterative Elimination strikt dominierter Strategien in drei Schritten:

	L	R
T	2,1	0,0
M	1,2	2,1
B	~~0,0~~	~~1,1~~

	L	R
T	2,1	~~0,0~~
M	1,2	~~2,1~~

	L
T	2,1
M	~~1,2~~

Bemerkung 13. Nur in den seltensten Fällen existiert strikte Dominanz.

Bemerkung 14. Das Ergebnis der iterativen Elimination ist bei strikter Dominanz eindeutig (unabhängig von der Reihenfolge der Elimination).

Definition 15 (Schwach dominierte Strategien). Eine Aktion $a_j^* \in A_j$ im Spiel $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ heißt schwach dominiert, falls es eine Aktion $a_j' \in A_j$ gibt, so dass für alle $a \in A$

$$u_j(a_{-j}, a_j') \geq u_j(a_{-j}, a_j^*)$$

und für mindestens ein $a \in A$

$$u_j(a_{-j}, a_j') > u_j(a_{-j}, a_j^*)$$

Beispiel 16. Das Ergebnis bei iterativer Elimination schwach dominierter Strategien ist im allgemeinen nicht eindeutig, sondern von der Eliminationsreihenfolge abhängig. Betrachte dazu folgendes Spiel:

	L	R
T	$2, 1$	$0, 0$
M	$2, 1$	$1, 1$
B	$0, 0$	$1, 1$

Eliminiert man zuerst T ($\leq$ M), dann L ($\leq R$), so hat jedes noch mögliche Ergebnis (RM oder RB) das Nutzenprofil $(1, 1)$. Die alternative Reihenfolge, bei der zuerst B ($\leq$ M), dann R ($\leq L$) eliminiert wird, führt hingegen zu dem Nutzenprofil $(2, 1)$.

2.2 Nash-Gleichgewichte

Nash-Gleichgewichte sind das meistbenutzte Lösungskonzept der Spieltheorie. Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Strategiekombination, in der kein Spieler durch Abweichung einen Vorteil erlangen kann.

Beispiel 17. Nash-Gleichgewichte bei Bach oder Strawinsky:

		Strawinsky-Fan	
		B	S
Bach-Fan	B	$2, 1$	$0, 0$
	S	$0, 0$	$1, 2$

Hier existieren zwei Nashgleichgewichte, nämlich (B, B) und (S, S).

Definition 18 (Nash-Gleichgewicht). Ein **Nash-Gleichgewicht (NG)** eines strategischen Spieles $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ist ein Profil $a^* \in A$ von Aktionen mit der Eigenschaft, dass für alle Spieler $i \in N$ gilt:

$$u_i(a^*) = u_i(a^*_{-i}, a^*_i) \geq u_i(a^*_{-i}, a_i) \qquad \text{für alle } a_i \in A_i.$$

Definition 19 (Nash-Gleichgewicht, alternativ). Sei $B_i(a_{-i})$ die Menge von Aktionen $a_i \in A_i$, die eine beste Reaktion auf a_{-i} sind, d.h.

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i \mid u_i(a_{-i}, a_i) \geq u_i(a_{-i}, a'_i) \text{ für alle } a'_i \in A_i\}\,.$$

Ein Nash-Gleichgewicht a^* ist ein Profil mit der Eigenschaft

$$a^*_i \in B_i(a^*_{-i}) \qquad \text{für alle } i \in N.$$