Spieltheorie

Prof. Dr. Bernhard Nebel — Universität Freiburg
Sommersemester 2005 — Institut für Informatik

Übungsblatt 6 — Lösungen

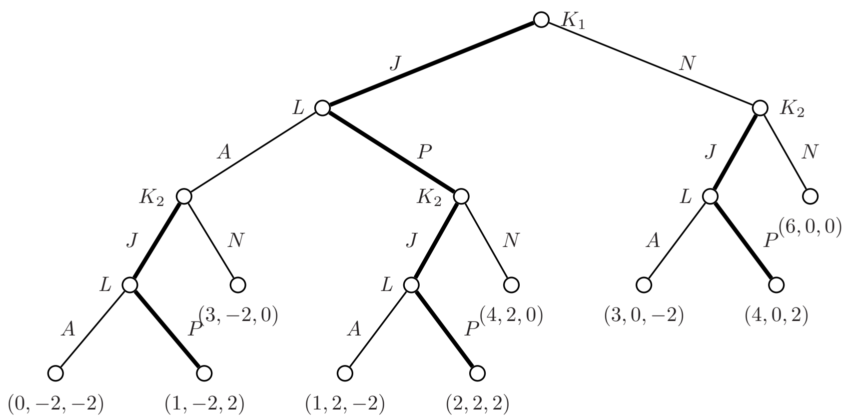
Aufgabe 6.1 (Ladenkettenspiel mit zwei Wiederholungen)
Beim *Ladenkettenspiel mit zwei Wiederholungen* gibt es drei Spieler: den Ladenkettenbesitzer L sowie zwei potenzielle Konkurrenten K_1 und K_2. Der Ablauf des Spiels ist wie folgt:

- Zunächst entscheidet K_1, ob er einen Laden eröffnet (J) oder nicht (N).
- Falls K_1 einen Laden eröffnet, entscheidet L, ob er darauf aggressiv (A) oder passiv (P) reagiert.
- Nachdem sich K_1 und ggfs. L entschieden haben, wiederholt sich die Entscheidungssituation mit K_2 anstelle von K_1.

Eröffnet K_i keinen Laden, beträgt sein Nutzen 0. Bei Eröffnung eines Ladens ist der Nutzen -2, wenn L aggressiv reagiert, $+2$ sonst.
Der Nutzen für Spieler L beträgt $+6$, falls keiner der beiden anderen Spieler einen Laden eröffnet. Für jeden eröffneten Laden reduziert sich der Nutzen von Spieler L um 2 und für jede aggressive Reaktion zusätzlich um 1.

(a) Geben Sie den Spielbaum für das Ladenkettenspiel mit zwei Wiederholungen an.

Lösung: Der folgende Baum beschreibt das Ladenkettenspiel. Die Nutzenwerte in den Nutzenprofilen sind in der Reihenfolge (u_L, u_{K_1}, u_{K_2}) angegeben.



(b) Bestimmen Sie ein Teilspiel-perfektes Gleichgewicht.

Lösung: Das einzige Teilspiel-perfekte Gleichgewicht in diesem Spiel besteht aus den Strategien, die in der Abbildung zu Aufgabe 1 (a) durch dickere Kanten dargestellt sind, d.h. $s^* = (s^*_L, s^*_{K_1}, s^*_{K_2})$ mit

$$\begin{aligned} s^*_L &= \{\, \langle J \rangle \mapsto P, \langle N, J \rangle \mapsto P, \langle J, A, J \rangle \mapsto P, \langle J, P, J \rangle \mapsto P \,\} = PPPP, \\ s^*_{K_1} &= \{\, \langle\rangle \mapsto J \,\} = J \text{ und} \\ s^*_{K_2} &= \{\, \langle N \rangle \mapsto J, \langle J, A \rangle \mapsto J, \langle J, P \rangle \mapsto J \,\} = JJJ. \end{aligned}$$

Das Auszahlungsprofil beträgt $(2,2,2)$. Um zu zeigen, dass s^* ein Teilspiel-perfektes Gleichgewicht ist, genügt es wegen des Ein-Schritt-Abweichungs-Lemmas, zu beweisen, dass für jeden Spieler $i \in \{ L, K_1, K_2 \}$ und jede Historie $h \in H$ mit $P(h) = i$ gilt:

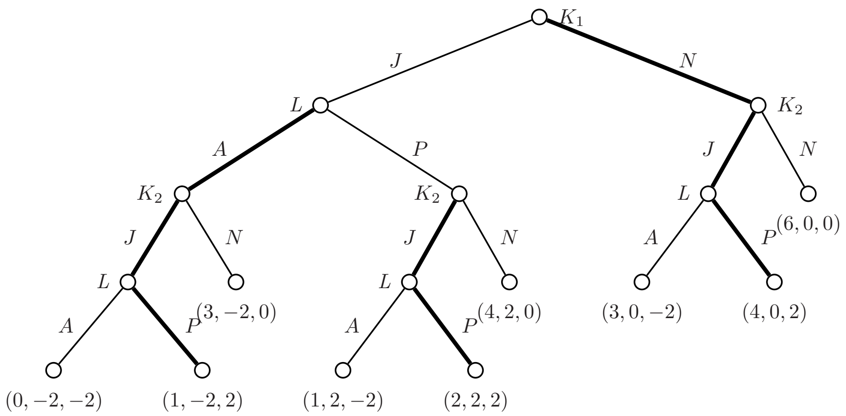
$$u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h)) \geq u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s_i))$$

für jede Strategie s_i des Spielers i im Teilspiel $\Gamma(h)$, die sich von $s^*_i|_h$ nur in der Aktion unterscheidet, die direkt nach der initialen Historie von $\Gamma(h)$ vorgeschrieben wird.

Für den Ladenkettenbesitzer und die Historien $\langle J, A, J\rangle$, $\langle J, P, J\rangle$ und $\langle N, J\rangle$ ist das klar, da sich L durch Abweichen jeweils um einen Nutzenpunkt verschlechtern würde. Nach den Historien $\langle J, A\rangle$, $\langle J, P\rangle$ und $\langle N\rangle$ ist Spieler K_2 am Zug und würde sich bei festem s^*_L jeweils um zwei Nutzenpunkte verschlechtern, wenn er zu der Aktion N abweichen würde. Spieler L würde durch ein Abweichen von P zu A nach Historie $\langle J\rangle$ seinen Nutzen von 2 auf 1 verringern, während Spieler K_1 durch Abweichen von J zu N nach der leeren Historie $\langle\rangle$ seinen Nutzen von 2 auf 0 vermindern würde.

(c) Bestimmen Sie ein Nash-Gleichgewicht, das kein Teilspiel-perfektes Gleichgewicht ist und zu einer anderen Auszahlung führt als das Gleichgewicht aus Teil (b).

Lösung: Betrachte das in der folgenden Abbildung dargestellte Strategieprofil $s' = (s'_L, s'_{K_1}, s'_{K_2})$:



Es sind also

$$\begin{aligned}
s'_L &= \{ \langle J\rangle \mapsto A, \langle N, J\rangle \mapsto P, \langle J, A, J\rangle \mapsto P, \langle J, P, J\rangle \mapsto P \} = APPP,\\
s'_{K_1} &= \{ \langle\rangle \mapsto N \} = N \text{ und}\\
s'_{K_2} &= \{ \langle N\rangle \mapsto J, \langle J, A\rangle \mapsto J, \langle J, P\rangle \mapsto J \} = JJJ
\end{aligned}$$

und das Auszahlungsprofil ist $(4, 0, 2)$. Das Strategieprofil s' ist nicht Teilspiel-perfekt, da sich Spieler L in dem Teilspiel $\Gamma(\langle J\rangle)$ verbessern könnte, indem er seine Strategie nach der leeren Historie des Teilspiels von A auf P ändert.

Andererseits ist s' ein Nash-Gleichgewicht: K_1 hat nur eine Möglichkeit, seine Strategie zu ändern. Diese Änderung würde seinen Nutzen nur verringern. Bei den Spielern L und K_2 müssen nur solche Änderungen an der Strategie betrachtet werden, die den rechten Teilbaum betreffen, da alle anderen Änderungen keinen Einfluss auf den Nutzen von L bzw. K_2 haben. Jede Strategieänderung von L, bei der $s'_L(\langle N, J\rangle)$ geändert wird, stellt L schlechter, jede Strategieänderung von L, bei der $s'_L(\langle N, J\rangle)$ nicht geändert wird, hat keinen Einfluss auf u_L. Entsprechend stellt jede Strategieänderung von K_2, bei der $s'_{K_2}(\langle N\rangle)$ geändert wird, K_2 schlechter, Strategieänderungen von K_2, bei denen $s'_{K_2}(\langle N\rangle)$ nicht geändert wird, haben keinen Einfluss auf u_{K_2}. Also ist s' ein Nash-Gleichgewicht.

Aufgabe 6.2 (Existenz von Teilspiel-perfekten Gleichgewichten)
Geben Sie ein extensives Spiel an, für das *kein* Teilspiel-perfektes Gleichgewicht existiert und beweisen Sie dies.
Lösung: Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ mit $N = \{1\}$, $H = \{\langle\rangle\} \cup \{\langle r\rangle \mid 0 \leq r < 1\}$, $P(\langle\rangle) = 1$ und $u_1(\langle r\rangle) = r$ für alle terminalen Historien mit $0 \leq r < 1$.
In diesem Spiel ist $\langle\rangle$ die einzige nichtterminale Historie und $A(\langle\rangle) = [0, 1)$. Angenommen, $s^* = (s_1^*)$ mit $s_1^*(\langle\rangle) = r \in [0, 1)$ wäre Teilspiel-perfekt. Dann könnte Spieler 1 seinen Nutzen $u_1(O(s^*)) = u_1(\langle r\rangle) = r$ durch keine Änderung seiner Strategie verbessern. Es ist jedoch $r^+ = \frac{r+1}{2}$ eine bessere Aktion als r wegen $r^+ > r$ und $0 \leq r^+ < 1$, d.h. mit $s_1^+ = \{\langle\rangle \mapsto r^+\}$ ist $u_1(O(s_{-1}^*, s_1^+)) = u_1(\langle r^+\rangle) = r^+ > r = u_1(O(s_{-1}^*, s_1^*))$ im Widerspruch dazu, dass s^* Teilspiel-perfekt ist.