Spieltheorie

Prof. Dr. Bernhard Nebel — Universität Freiburg
Sommersemester 2005 — Institut für Informatik

Übungsblatt 3

Abgabe: Mittwoch, 11. Mai 2005

Aufgabe 3.1 (Fixpunktsatz von Kakutani)
Der Fixpunktsatz von Kakutani lautet wie folgt:
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere, kompakte und konvexe Menge und sei $f : A \to 2^A$ eine ober-hemi-stetige Korrespondenz, so dass für jedes $x \in A$ die Menge $f(x) \subseteq A$ nicht-leer und konvex ist. Dann hat f einen Fixpunkt, d. h. es existiert ein $x \in A$ mit $x \in f(x)$.
Alle sechs Bedingungen (A nicht-leer, A kompakt, A konvex, f ober-hemi-stetig, $f(x)$ nicht-leer, $f(x)$ konvex) werden tatsächlich benötigt, d. h. wenn man nur eine davon weglässt, gilt der Satz nicht mehr. Beweisen Sie dies für vier Bedingungen Ihrer Wahl.

Hinweis: In allen sechs Fällen existieren Gegenbeispiele für $n = 1$.

Aufgabe 3.2 (Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien)
Das *Elfmeter-Spiel* ist durch folgende Matrix gegeben:

	L	M	R
L	$-1,\ 1$	$1, -1$	$1, -1$
M	$1, -1$	$-2,\ 1$	$1, -1$
R	$1, -1$	$1, -1$	$-1,\ 1$

Intuition: Der Schütze kann nach links (L), rechts (R) oder in die Mitte schießen (M), der Torwart nach links (L) oder rechts (R) springen oder stehen bleiben (M). Die Richtungen sind dabei jeweils aus Sicht des Schützen zu interpretieren. Wird der Torwart verladen, erzielt der Schütze ein Tor (Nutzenprofil $(1, -1)$); ansonsten wird der Ball gehalten (Nutzenprofil $(-1, 1)$). Schießt der Schütze in die Mitte und der Ball wird gehalten, werden die Boulevard-Zeitungen am nächsten Morgen Spott über ihm ausschütten (Nutzenprofil $(-2, 1)$).

(a) Zeigen Sie, dass für alle Nash-Gleichgewichte (α_1^*, α_2^*) des Elfmeter-Spiels $\mathrm{supp}(\alpha_1^*) = \mathrm{supp}(\alpha_2^*) = \{L, M, R\}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte des Elfmeter-Spiels und die zugehörigen Nutzenprofile.

Die Übungsblätter dürfen in Gruppen von zwei Studenten bearbeitet werden. Bitte schreiben Sie beide Namen und den Namen des Tutors auf Ihre Lösung.