**Spieltheorie**

Prof. Dr. Bernhard Nebel
Sommersemester 2005

Universität Freiburg
Institut für Informatik

# Übungsblatt 2 — Lösungen

**Aufgabe 2.1** (Räuber und Gendarm in gemischten Strategien)
Das vereinfachte Räuber-und-Gendarm-Spiel ist das strategische Spiel

$$\langle \{R, G\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}_{i \in \{R,G\}}, (u_i)_{i \in \{R,G\}} \rangle,$$

wobei $u_R((a_R, a_G)) = |a_R - a_G|$ für alle $a_R, a_G \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $u_G = -u_R$. Geben Sie ein Nash-Gleichgewicht des Spiels in gemischten Strategien an und beweisen Sie, dass es sich um ein Nash-Gleichgewicht handelt.

*Hinweis:* Es gibt ein Nash-Gleichgewicht $(\alpha_R^*, \alpha_G^*)$ mit $|\mathrm{supp}(\alpha_R^*)| = 2$ und $|\mathrm{supp}(\alpha_G^*)| = 5$, das vergleichsweise einfach zu finden ist.

**Lösung:**
Eines der Nash-Gleichwichte dieses Spiels ist das Strategieprofil $(\alpha_R^*, \alpha_G^*)$ mit:

$$\alpha_R^* = \left\{1 \mapsto \frac{1}{2}, 2 \mapsto 0, 3 \mapsto 0, 4 \mapsto 0, 5 \mapsto \frac{1}{2}\right\}$$
$$\alpha_G^* = \left\{1 \mapsto \frac{1}{5}, 2 \mapsto \frac{1}{5}, 3 \mapsto \frac{1}{5}, 4 \mapsto \frac{1}{5}, 5 \mapsto \frac{1}{5}\right\}$$

Um die Nash-Gleichgewichts-Eigenschaft zu beweisen, müssen wir zeigen, dass $\alpha_R^*$ eine beste Antwort auf $\alpha_G^*$ ist und umgekehrt. Dazu betrachten wir zunächst den erwarteten Nutzen $U_R(a_R, \alpha_G^*)$ für *reine* Strategien des Räubers.
Wir erhalten:

$$\begin{aligned} U_R(a_R, \alpha_G^*) &= \sum_{a_G \in \{1,2,3,4,5\}} \alpha_G^*(a_G) \cdot u_R(a_R, a_G) \\ &= \sum_{a_G \in \{1,2,3,4,5\}} \frac{1}{5} \cdot |a_R - a_G| \\ &= \frac{1}{5}(|a_R - 1| + |a_R - 2| + |a_R - 3| + |a_R - 4| + |a_R - 5|) \end{aligned}$$

Einsetzen der möglichen Werte für $a_R$ ergibt einen erwarteten Nutzen von 2 für $a_R \in \{1, 5\}$, $\frac{7}{5}$ für $a_R \in \{2, 4\}$ und $\frac{6}{5}$ für $a_R = 3$. In reinen Strategien sind damit 1 und 5 die besten Antworten des Räubers auf $a_G^*$. In gemischten Strategien kann es keine besseren Antworten geben, denn um einen erwarteten Nutzen größer als 2 zu erzielen, müsste mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit eine reine Strategie ausgewählt werden, die einen Nutzen größer als 2 erzielt, und eine solche Strategie gibt es nicht. Also sind genau diejenigen Strategien beste Antworten, die einen Nutzen von 2 erzielen; $\alpha_R^*$ erfüllt diese Eigenschaft, wie man leicht überprüfen kann. (Allgemein gilt: Jede Strategie $\alpha_R$ mit $\mathrm{supp}(\alpha_R) \subseteq \{1, 5\}$ ist eine beste Antwort auf $\alpha_G^*$.) Somit ist $\alpha_R^*$ eine beste Antwort auf $\alpha_G^*$.
Umgekehrt ermitteln wir analog den Nutzen der möglichen reinen Antworten des Gendarms auf $\alpha_R^*$:

$$
\begin{aligned}
U_G(\alpha_R^*, a_G) &= \sum_{a_R \in \{1,2,3,4,5\}} \alpha_R^*(a_R) \cdot u_G(a_R, a_G) \\
&= \frac{1}{2} \cdot u_G(1, a_G) + \frac{1}{2} \cdot u_G(5, a_G) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (-|1 - a_G|) + \frac{1}{2} \cdot (-|5 - a_G|) \\
&= -\frac{1}{2}(|a_G - 1| + |a_G - 5|)
\end{aligned}
$$

Einsetzen der möglichen Werte für $a_G$ ergibt für alle möglichen Strategien den Nutzen $-2$. Da der Nutzen also unabhängig von der Wahl der Strategie ist, ist auch bei gemischten Strategien unerheblich, welche Aktion ausgewählt wird: Unabhängig von der Zufallsentscheidung ist jede Strategie eine beste Antwort auf $\alpha_R^*$. Insbesondere ist damit auch $\alpha_G^*$ eine beste Antwort auf $\alpha_R^*$. Gemeinsam mit dem vorherigen Ergebnis ergibt sich also, dass $(\alpha_R^*, \alpha_G^*)$ ein Nash-Gleichgewicht ist.
*Anmerkung:* Neben dem gefundenen Nash-Gleichgewicht besitzt das Spiel noch unendlich viele weitere, von denen allerdings alle dieselbe Strategie für den Räuber fordern. Der Gendarm hingegen ist in der Wahl seiner Strategie relativ frei, sofern er sich "im gewichteten Durchschnitt" für die mittlere Position entscheidet. Ein noch einfacheres Nash-Gleichgewicht ergibt sich, indem man $\alpha_G^*$ durch die reine Strategie 3 ersetzt.

**Aufgabe 2.2** (Dominierte Strategien in der gemischten Erweiterung)
Sei $G = \langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ ein strategisches Spiel, und sei $G'$ seine gemischte Erweiterung. Weiterhin sei $i \in N$ ein Spieler in $G$ bzw. $G'$. Beweisen Sie:

(a) Wenn $a_i \in A_i$ in $G$ stark dominiert wird, dann wird $a_i$ auch in $G'$ stark dominiert.

**Lösung:**

Wenn $a_i \in A_i$ in $G$ stark dominiert wird, dann gibt es eine Aktion $a_i^+ \in A_i$ mit der Eigenschaft $u_i(a_i^+, a_{-i}) > u_i(a_i, a_{-i})$ für alle $a_{-i} \in A_{-i}$. Es ist also $a_i^+$ also immer eine bessere Wahl als $a_i$, unabhängig davon, für welche (reinen) Strategien sich die anderen Spieler entscheiden. Wir zeigen, dass dies immer noch gilt, wenn die anderen Spieler gemischte Strategien verwenden können. Sei also $\alpha_{-i}$ ein beliebiges Profil gemischter Strategien für die anderen Spieler. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
U_i(a_i^+, \alpha_{-i}) &= \sum_{a_{-i}\in A_{-i}} \left( \prod_{j\in N\setminus\{i\}} \alpha_j(a_j) \right) u(a_i^+, a_{-i}) \\
&> \sum_{a_{-i}\in A_{-i}} \left( \prod_{j\in N\setminus\{i\}} \alpha_j(a_j) \right) u(a_i, a_{-i}) \\
&= U_i(a_i, \alpha_{-i})
\end{aligned}
$$

Die Ungleichung gilt hier, da $u(a_i^+, a_{-i}) > u(a_i, a_{-i})$ für beliebige $a_{-i} \in A_{-i}$ gilt und die Wahrscheinlichkeiten $\prod_{j\in N\setminus\{i\}} \alpha_j(a_j)$ nie negativ und für mindestens ein $a_{-i} \in A_{-i}$ echt positiv sind.

(b) Die Umkehrung von (a) gilt im Allgemeinen nicht.

**Lösung:**

Wir betrachten dazu das Zweipersonenspiel, das durch folgende Matrix gegeben ist:

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $O$ | $4,0$ | $0,4$ |
| $M$ | $0,4$ | $4,0$ |
| $U$ | $1,1$ | $1,1$ |

In reinen Strategien liegt keine Dominanzbeziehung vor. Betrachten wir jedoch die gemischte Strategie $\alpha_1 = \{O \mapsto \frac{1}{2}, M \mapsto \frac{1}{2}, U \mapsto 0\}$, so erhalten wir $U_1(\alpha_1, L) = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 2$ und $U_1(\alpha_1, R) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$, und damit $U_1(\alpha_1, \alpha_2) = 2$ für alle $\alpha_2 \in \Delta(\{L, R\})$.

Für die reine Strategie $U$ gilt hingegen $U_1(U, L) = U_1(U, R) = 1$ und somit $U_1(U, \alpha_2) = 1$ für alle $\alpha_2 \in \Delta(\{L, R\})$. Da $2 > 1$, wird $U$ also von $\alpha_1$ stark dominiert.

(c) Wenn $a_i \in A_i$ in $G'$ stark dominiert wird, dann wird auch jede gemischte Strategie $\alpha_i \in \Delta(A_i)$ mit $a_i \in \text{supp}(\alpha_i)$ in $G'$ stark dominiert.

**Lösung:**

Wenn $a_i \in A_i$ von einer gemischten Strategie $\alpha_i^+$ stark dominiert wird, dann kann man jede gemischten Strategie, die $a_i$ verwendet, verbessern, indem man in denjenigen Situationen, in denen man sonst $a_i$ gewählt hätte, stattdessen der Strategie $\alpha_i^+$ folgt (also eine erneute Zufallsauswahl trifft). In den Situationen, in denn nicht $a_i$ gewählt würde, bleibt der Nutzen dann gleich; in den anderen Situationen erhöht er sich. Im Erwartungswert erhöht er sich also.

Zum formalen Beweis: Werde $a_i \in A_i$ von $\alpha_i^+ \in \Delta(A_i)$ stark dominiert, und sei $\alpha_i \in \Delta(A_i)$ eine gemischte Strategie, deren Träger $a_i$ enthält. Sei $p := \alpha_i(a_i) > 0$. Wir definieren eine neue Strategie $\beta_i^+ \in \Delta(A_i)$ und zeigen, dass diese $\alpha_i$ strikt dominiert:

$$\beta_i^+(b_i) = \begin{cases} \alpha_i(b_i) + p\alpha_i^+(b_i) & \text{falls } b_i \neq a_i \\ p\alpha_i^+(b_i) & \text{falls } b_i = a_i \end{cases}$$

Aktion $b_i$ wird also ausgewählt, wenn $\alpha_i$ dies getan hätte und $a_i \neq b_i$ ist (Summand $\alpha_i(b_i)$), oder wenn $\alpha_i$ die dominierte Aktion $a_i$ und $\alpha_i^+$ die Aktion $b_i$ gewählt hätte (Summand $p\alpha_i^+(b_i)$).

Die Funktion $\beta_i^+$ definiert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, denn alle Funktionswerte sind nicht-negativ und summieren sich zu 1 auf:

$$\begin{aligned} \sum_{b_i \in A_i} \beta_i^+(b_i) &= \sum_{b_i \in A_i \setminus \{a_i\}} \alpha_i(b_i) + \sum_{b_i \in A_i} p\alpha_i^+(b_i) \\ &= (1 - p) + (p \cdot 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass die gemischte Strategie $\beta_i^+$ die gemischte Strategie $\alpha_i$ stark dominiert. Sei dazu $\alpha_{-i}$ ein beliebiges Profil von gemischten Strategien für die anderen Spieler. Es gilt:

$$\begin{aligned}
U_i(\beta_i^+, \alpha_{-i}) &= \sum_{b_i \in A_i} \beta_i^+(b_i) \cdot U_i(b_i, \alpha_{-i}) \\
&= \sum_{b_i \in A_i \setminus \{a_i\}} (\alpha_i(b_i) + p\alpha_i^+(b_i)) \cdot U_i(b_i, \alpha_{-i}) + p\alpha_i^+(a_i) \cdot U_i(a_i, \alpha_{-i}) \\
&= \sum_{b_i \in A_i \setminus \{a_i\}} \alpha_i(b_i) \cdot U_i(b_i, \alpha_{-i}) + \sum_{b_i \in A_i} p\alpha_i^+(b_i) \cdot U_i(b_i, \alpha_{-i}) \\
&= \sum_{b_i \in A_i} \alpha_i(b_i) \cdot U_i(b_i, \alpha_{-i}) - \alpha_i(a_i) \cdot U_i(a_i, \alpha_{-i}) \\
&\quad + p \cdot \sum_{b_i \in A_i} \alpha_i^+(b_i) \cdot U_i(b_i, \alpha_{-i}) \\
&= U_i(\alpha_i, \alpha_{-i}) - p \cdot U_i(a_i, \alpha_{-i}) + p \cdot U_i(\alpha_i^+, \alpha_{-i}) \\
&= U_i(\alpha_i, \alpha_{-i}) + p \cdot (U_i(\alpha_i^+, \alpha_{-i}) - U_i(a_i, \alpha_{-i})) \\
&> U_i(\alpha_i, \alpha_{-i})
\end{aligned}$$

Die Ungleichung am Ende gilt dabei, weil nach Voraussetzung die Strategie $a_i$ von der Strategie $\alpha_i^+$ stark dominiert wird und $p > 0$ ist, so dass der Summand $p \cdot (U_i(\alpha_i^+, \alpha_{-i}) - U_i(a_i, \alpha_{-i}))$ negativ ist.

Es ist also in jeder Situation die Strategie $\beta_i^+$ echt besser für Spieler $i$ als die Strategie $\alpha_i$. Die Strategie $\alpha_i$ wird somit stark dominiert, was zu beweisen war.