Spieltheorie

Prof. Dr. Bernhard Nebel
Sommersemester 2005

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 10 — Lösungen

Aufgabe 10.1 (Subadditive und konkave Domänen)
Eine Task-orientierte Domäne $\langle T, N, c \rangle$ heißt *subadditiv*, wenn für alle endlichen Taskmengen $A, B \subseteq T$ gilt: $c(A \cup B) \leq c(A) + c(B)$.
Sie heißt *konkav*, wenn für alle endlichen Taskmengen $A, B, C \subseteq T$ mit $B \subseteq A$ gilt: $c(A \cup C) - c(A) \leq c(B \cup C) - c(B)$.
Zeigen Sie:

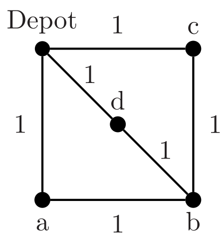
(a) Konkave Domänen sind subadditiv.

Lösung: Sei $\langle T, N, c \rangle$ eine konkave Domäne. Dann gilt für endliche Mengen $A, C \subseteq T$ die Ungleichung $c(A \cup C) - c(A) \leq c(\emptyset \cup C) - c(\emptyset) = c(C) - 0 = c(C)$. Addition von $c(A)$ ergibt $c(A \cup C) \leq c(A) + c(C)$ und damit Subadditivität.

(b) Die Postboten-Domäne ist für beliebige Graphen subadditiv, aber nicht für beliebige Graphen konkav.

Lösung: Zur Subadditivität: für endliche Taskmengen X ist $c(X)$ die Länge eines kürzesten Pfades $\pi(X)$, der vom Startknoten s ausgehend alle Knoten in X besucht und dann zu s zurück führt. Dann ist $\pi(A)\pi(B)$ ein Pfad der Länge $|\pi(A)\pi(B)| = |\pi(A)| + |\pi(B)| = c(A) + c(B)$, der von s aus alle Knoten in $A \cup B$ besucht und dann zu s zurück führt. Da ein *kürzester* Pfad mit dieser Eigenschaft nicht länger sein kann als $\pi(A)\pi(B)$, folgt somit $c(A \cup B) = |\pi(A \cup B)| \leq c(A) + c(B)$, was zu beweisen war.

Zur Konkavität: es gibt Graphen, für die die Postboten-Domäne nicht konkav ist, wie folgendes Gegenbeispiel beweist:

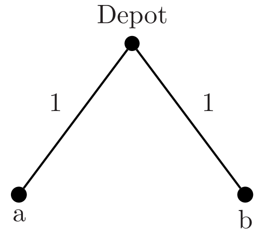


Betrachte $A = \{ a, b, c \}$, $B = \{ a, b \} \subseteq A$ und $C = \{ d \}$.

Dann ist $c(A \cup C) - c(A) = c(\{ a, b, c, d \}) - c(\{ a, b, c \}) = 6 - 4 = 2$ und $c(B \cup C) - c(B) = c(\{ a, b, d \}) - c(\{ a, b \}) = 4 - 4 = 0$. Also ist die Ungleichung $c(A \cup C) - c(A) \leq c(B \cup C) - c(B)$ verletzt.

(c) Die Logistik-Domäne ist nicht für beliebige Graphen subadditiv und auch nicht für beliebige Graphen konkav.

Lösung: Da nach Aufgabenteil (a) jede konkave Domäne auch subadditiv ist, genügt es, ein Gegenbeispiel gegen die Subadditivität anzugeben, da die Logistik-Domäne dann auch nicht konkav sein kann. Betrachten wir den folgenden Graphen:



Dann ist offenbar $c(\{a\}) = c(\{b\}) = 1$ und $c(\{a, b\}) = 3$.

Für $A = \{a\}$ und $B = \{b\}$ gilt also $c(A \cup B) = 3 > 1 + 1 = c(A) + c(B)$, was die Subadditivität verletzt.

Derselbe Graph ist mit $A = \{a\}$, $B = \emptyset$ und $C = \{b\}$ auch ein Gegenbeispiel gegen die Konkavität, denn $c(A \cup C) - c(A) = c(\{a, b\}) - c(\{a\}) = 3 - 1 = 2 > 1 = 1 - 0 = c(\{b\}) - c(\emptyset) = c(B \cup C) - c(B)$.

Aufgabe 10.2 (Komplexität der Kostenfunktion)
Zeigen Sie:

(a) Das Problem, in der Postbotendomäne zu entscheiden, ob eine gegebene Taskmenge Kosten von höchstens K verursacht, ist NP-vollständig.

Lösung: Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit endlicher Knotenmenge. Ein Pfad π in G ist ein Hamiltonscher Pfad, wenn jeder Knoten $v \in V$ genau einmal in π vorkommt, und π ist ein Hamiltonscher Kreis, wenn π geschlossen ist und jeder Knoten $v \in V$ außer dem Start- und Zielknoten s genau einmal und s genau zweimal besucht wird. Das Hamilton-Pfad-Problem (Hamilton-Kreis-Problem) ist das Problem, für einen gegebenen Graphen zu entscheiden, ob er einen Hamiltonschen Pfad (Hamiltonschen Kreis) besitzt. Beide Probleme sind NP-vollständig.

Sei der ungerichtete Graph $G = (V, E)$ mit der Distanzfunktion $d : E \to \mathbb{N}$, dem Depot $D \in V$ und der Taskmenge $T \subseteq V$ zusammen mit den maximalen Kosten $K \in \mathbb{N}$ eine Instanz des beschriebenen Entscheidungsproblems in der Postbotendomäne. Dass das Problem in NP liegt, ist klar, denn ein nichtdeterministischer Lösungsalgorithmus kann eine Permutation π einer D und alle Knoten in T enthaltenden Teilmenge aller Knoten „raten" und dann testen, ob π einem geschlossenen Weg in G mit Kosten von höchstens K entspricht.

Um die NP-Schwere des Problems zu zeigen, genügt es, ein anderes NP-schweres Problem, etwa das *Hamilton-Kreis-Problem* (HK), darauf zu reduzieren. Sei also $\mathcal{I}_{\mathsf{HK}} = (V, E)$ eine HK-Instanz, wobei $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ die Knotenmenge und E die Menge der Kanten ist. Es genügt, eine solche Polynomialzeitübersetzung von $\mathcal{I}_{\mathsf{HK}}$ in eine Instanz $\mathcal{I}_{\mathsf{Post}}$ unseres Entscheidungsproblems zur Postbotendomäne anzugeben, dass $\mathcal{I}_{\mathsf{HK}}$ genau dann eine positive Instanz ist, wenn auch $\mathcal{I}_{\mathsf{Post}}$ eine positive Instanz ist. Konstruiere dazu $\mathcal{I}_{\mathsf{Post}} = (V, E, d, D, T, K)$ mit V und E wie in $\mathcal{I}_{\mathsf{HK}}$ und Distanzfunktion $d : E \to \mathbb{N}$ mit $d(e) = 1$ für alle $e \in E$, Depot $D = v_1 \in V$, Taskmenge $T = V$ und maximalen Kosten $K = n$. Diese Konstruktion ist in polynomieller Zeit möglich. Angenommen, $\mathcal{I}_{\mathsf{HK}}$ ist eine positive HK-Instanz, d.h. es gibt einen Hamiltonschen Kreis in $G = (V, E)$, etwa $\pi = \pi(1), \dots, \pi(n), \pi(1)$ mit $\pi(1) = v_1$. Dann verursacht die Taskmenge T Kosten von höchstens K, denn alle Tasks liegen auf dem Pfad π, das Depot ist Start- und Zielknoten und π enthält genau K Kanten mit Distanz von jeweils 1. Angenommen, die Taskmenge T verursacht Kosten von höchstens K. Dann gibt es einen geschlossenen Pfad $\pi = \pi(1), \dots, \pi(n), \pi(1)$ mit $\pi(1) = D$, auf dem alle Knoten aus T liegen. Da ein solcher Pfad *mindestens* Kosten von K verursachen muss, weil alle Knoten besucht werden müssen, kann kein Knoten außer dem Startknoten mehrfach besucht werden. Also ist π ein Hamiltonscher Kreis in $G = (V, E)$.

(b) Das Problem, in der Logistikdomäne zu entscheiden, ob eine gegebene Taskmenge Kosten von höchstens K verursacht, ist NP-vollständig.

Lösung: Auch dieses Problem liegt in NP, weil es wieder möglich ist, nichtdeterministisch einen Weg zu „raten" und dann zu verifizieren, dass er das Problem löst.

Zur NP-Schwere: sei $\mathcal{I}_{\mathsf{HP}} = (V, E)$ eine Hamilton-Pfad-Instanz, wobei $V = \{ v_1, \dots, v_n \}$ die Knotenmenge und E die Menge der Kanten ist. Wir definieren jetzt $\mathcal{I}_{\mathsf{Logistik}} = (V', E', d, D, T, K)$ mit $V' = V \cup \{ D \}$, wobei $D \notin V$, $E' = E \cup \{ \{ D, v \} \mid v \in V \}$, $d : E' \to \mathbb{N}$ mit $d(e) = 1$ für alle $e \in E$ und $d(e) = n+1$ für alle $e \in E' \setminus E$, $T = V$ und maximalen Kosten $K = 2n$. Diese Konstruktion ist in polynomieller Zeit möglich. Angenommen, $\mathcal{I}_{\mathsf{HP}}$ ist eine positive HP-Instanz, d.h. es gibt einen Hamiltonschen Pfad in $G = (V, E)$, etwa $\pi = \pi(1), \dots, \pi(n)$. Dann verursacht in $\mathcal{I}_{\mathsf{Logistik}}$ die Taskmenge T Kosten von höchstens K, denn alle Tasks liegen auf dem Pfad $\pi' = D, \pi(1), \dots, \pi(n)$, dessen aufsummierte Kantenlängen nach der Definition von d genau K sind. Angenommen, die Taskmenge T verursacht Kosten von höchstens K. Dann gibt es einen Pfad $\pi = D, \pi(2), \dots, \pi(n+1)$, auf dem alle Knoten aus T liegen. Da ein solcher Pfad *mindestens* Kosten von K verursachen muss, weil alle Knoten besucht werden müssen, kann kein Knoten mehrfach besucht werden. Also ist $\pi' = \pi(2), \dots, \pi(n+1)$ ein Hamiltonscher Pfad in $G = (V, E)$.