Spieltheorie

Prof. Dr. Bernhard Nebel
Sommersemester 2005

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 1 — Lösungen

Aufgabe 1.1 (Räuber und Gendarm)
Beim *Räuber-und-Gendarm*-Spiel wählen die beiden Spieler *Räuber* und *Gendarm* jeweils einen Standort aus der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Der Räuber wird gefangen (Nutzen -10), wenn beide Spieler denselben Standort wählen. Ansonsten ist sein Nutzen um so größer, je weiter er vom Gendarm entfernt ist, d. h. gleich $|i - j|$, wenn die Standorte i und j gewählt wurden. Der Nutzen des Gendarms ist dem des Räubers entgegengesetzt.

(a) Formalisieren Sie das Spiel als strategisches Zweipersonenspiel (genauer: als Nullsummenspiel), d. h. geben Sie Spielermenge, Aktionsmenge und Nutzenfunktionen an, wobei Sie letztere in Matrixform darstellen.

Lösung:

$\langle \{R, G\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}_{i \in \{R,G\}}, (u_i)_{i \in \{R,G\}} \rangle$, wobei der Nutzen durch folgende Matrix gegeben ist (Zeilen für Spieler R, Spalten für Spieler G):

	1	2	3	4	5
1	$-10, 10$	$1, -1$	$2, -2$	$3, -3$	$4, -4$
2	$1, -1$	$-10, 10$	$1, -1$	$2, -2$	$3, -3$
3	$2, -2$	$1, -1$	$-10, 10$	$1, -1$	$2, -2$
4	$3, -3$	$2, -2$	$1, -1$	$-10, 10$	$1, -1$
5	$4, -4$	$3, -3$	$2, -2$	$1, -1$	$-10, 10$

(b) Bestimmen Sie die Maximinimierer für den Räuber und für den Gendarm.

Lösung:

Für den Räuber sind alle Aktionen Maximinimierer: Jede Aktion garantiert einen Nutzen von mindestens -10, und keine Aktion kann einen höheren Nutzen garantieren.

Für den Gendarm ist nur die Aktion 3 ein Maximinimierer: Sie garantiert einen Nutzen von mindestens -2, während die anderen Aktionen nur einen Nutzen von -3 bzw. -4 garantieren.

(c) Untersuchen Sie das Spiel auf Nash-Gleichgewichte.

Es gibt in diesem Spiel kein Nash-Gleichgewicht: Wäre (i, j) ein Nash-Gleichgewicht, dann müsste $i = j$ gelten, da für den Gendarm nur j eine beste Antwort auf i ist. Dann könnte aber der Räuber seinen Nutzen erhöhen, indem er irgendeine andere Aktion wählt, denn i ist die schlechteste (insbesondere also keine beste) Antwort auf j.

Aufgabe 1.2 (Multiplikationsspiele)
Bei den *Multiplikationsspielen* wählen zwei Spieler je eine Zahl aus einer Menge M. Die Auszahlung jeden Spielers ist das Produkt der beiden gewählten Zahlen.

(a) Untersuchen Sie das Multiplikationsspiel für $M = \{1, \ldots, m\}$ ($m \in \mathbb{N}_1$) hinsichtlich der drei Lösungskonzepte

- iterierte Elimination schwach dominierter Strategien,
- iterierte Elimination strikt dominierter Strategien und
- Nash-Gleichgewicht.

Lösung:

Für beide Spieler gilt, dass die Aktion m alle anderen Aktionen m' strikt (und damit auch schwach) dominiert, denn für alle $m' \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{m\}$ und $n \in \{1, \ldots, m\}$ gilt: $m \cdot n > m' \cdot n$.

Elimination dominierter Strategien liefert also sowohl im schwachen wie im strikten Fall das Strategieprofil (m, m) als eindeutiges Ergebnis. Nach dem Satz aus der Vorlesung muss (m, m) damit auch gleichzeitig das einzige Nash-Gleichgewicht sein.

(b) Wiederholen Sie Ihre Analyse für $M = \mathbb{N}_1$.

Lösung:

In diesem Fall gilt, dass jede Aktion $m \in \mathbb{N}_1$ von der Aktion $m + 1$ strikt (und damit auch schwach) dominiert wird, denn für jede Aktion $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(m + 1) \cdot n > m \cdot n$.

Elimination dominierter Strategien führt also zu keinem Ergebnis (bzw., je nach Auffassung, eliminiert alle Strategien). Da sich jeder Spieler in jeder Situation verbessern kann, indem er von Aktion m auf $m + 1$ übergeht, gibt es auch kein Nash-Gleichgewicht.

(c) Wiederholen Sie Ihre Analyse für $M = \mathbb{N}_0$.

Lösung:

Hier wird keine Strategie strikt dominiert, denn dazu müsste eine bestimmte Strategie m in jeder Situation besser sein als eine andere Strategie m'. Das kann jedoch nicht der Fall sein, wenn der andere Spieler die Strategie 0 wählt, denn dann ist der Nutzen in beiden Fällen gleich, da $m \cdot 0 = m' \cdot 0 = 0$.

Jedoch gilt nach wie vor, dass jede Aktion m von der Aktion $m+1$ schwach dominiert wird, denn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $(m+1) \cdot n \geq m \cdot n$, und es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$, für das $(m+1) \cdot n > m \cdot n$ gilt (z. B. $n = 1$). Schwache Elimination eliminiert also wiederum alle Strategien.

In diesem Spiel gibt es genau ein Nash-Gleichgewicht, nämlich das Strategieprofil $(0, 0)$. Wählt der eine Spieler die Aktion 0, so kann sich der andere Spieler nicht verbessern, indem er eine andere Strategie als 0 wählt, denn sein Nutzen ist immer $m \cdot 0 = 0$. Es handelt sich also um ein Nash-Gleichgewicht. Andererseits gibt es kein weiteres Nash-Gleichgewicht: Bei Profilen (m, n) mit $m > 0$ kann sich der zweite Spieler verbessern, indem er zur Strategie $n + 1$ übergeht, und bei Profilen (m, n) mit $n > 0$ kann sich der erste Spieler verbessern, indem er zur Strategie $m + 1$ übergeht.