Spieltheorie

Vorlesung: Prof. Nebel
Assistent: Malte Helmert
LaTeX-Umsetzung: Ingo Thon
{nebel|helmert|thon}(Äffchen)informatik.uni-freiburg.de

6. Juli 2004

Vorlesungsseite
Übungen

Erklaerung:

Status:	inital:	das was ich in der Vorlesung abgetippt habe
	preview:	erste Version von mir ueberflogen
	corrected:	von mehreren Komilitonen und mir gegengelesen
	approved:	durchgelesen von Malte Helmert bzw. Prof. Nebel
	complete:	es sind auch alle Bilder da und die Vorlesung ist fertig formatiert

Falls Ihr Papier sparen wollt, solltet Ihr nur die Vorlesungen ausdrucken, bei denen die Vorlesung und alle vorhergehenden mit complete gekennzeichnet sind, da sich ansonsten noch durch geänderte Formatierungen das Layout aendern kann.
Mit (Anm: ...) sind in der Regel Texte gekennzeichnet, die ich während der Vorlesung aus mündlichen Aussagen von Professor Nebel geschlossen habe. Diese Texte sind nicht offiziell abgesegnet und müßen mit einem gesunden Mißtrauen genoßen werden.

Bei Fehlermeldung an Malte Helmert/Ingo Thon bitte auch immer die Buildnumber 785 mit angeben.

Kapitel 1

Einführung

20.04.2004

Spieltheorie = Analyse strategischer Entscheidungssituationen

- Resultat abhängig von den Entscheidungen der Mitspieler
- alle sind sich dessen bewusst
  → welches Gesamtergebnis, falls alle Spieler "rational" handeln.
  (rational handeln $\hat{=}$ Nutzen maximieren)
- Gebiet der theoretischen Wirtschaftswissenschaften
- Neuerdings auch in der KI und Informatik
- Theorie der Interaktion zwischen Agenten
- Dezentrale, heterogene Systeme von egoistischen Agenten
- Algorithmische Fragen sind noch zu behandeln
  → Spieltheorie für Informatik unter Umständen noch sinnvoller als für Wirtschaftswissenschaftler

Beispiel (Anflugmanagement an Flughäfen):

Heutzutage: First-come-first-serve
Besser wäre: Anflugscheduling

Bei mehreren Fluglinien notwendig: Online-Verhandlung.

1.1. Gebiete der Spieltheorie

1.1.1 Strategische Spiele (Normalform-Spiele)

- Strategien werden vor Beginn festgelegt
- Spielergebnis resultiert aus Strategiekombination

Beispiel (Gefangenendilemma):

- zwei Gefangene
- diese werden einzeln verhört

(1) Falls beide schweigen:	Beide je 3 Monate Gefängnis
(2) Wenn nur einer gesteht:	→ Kronzeuge frei
	→ "Schweiger" 10 Jahre Gefängnis
(3) Falls beide gestehen:	Beide je 3 Jahre Gefängnis

1.1.2 Extensive Spiele

- Spiele mit mehreren Zügen
  Beispiele: Schach, wiederholte strategische Spiele

1.1.3 Spiele mit unvollständigen Informationen

- Beispiel: Kartenspiele

1.1.4 Koalitionsspiele/Verhandlungsspiele

- Verhandlungen

- Verteilung von Gewinnen

- Wahlmechanismen

1.1.5 Implementierungstheorie/Mechanismusdesign

- „Spieledesign“ um den Gesamtnutzen zu optimieren

1.1.6 Lösungskonzepte

- dominante Strategien

- Nash-Gleichgewichte

- andere Gleichgewichtskonzepte

Kapitel 2

Strategische Spiele

Definition 1 (Strategische Spiele):
Ein strategisches Spiel $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ beinhaltet

- eine endliche **Spielermenge** N
- für jeden Spieler $i \in N$ eine nichtleere Menge A_i (von **Aktionen/Strategien**)

$$A = \bigtimes_{i \in N} A_i$$

- für jeden Spieler $i \in N$ eine **Auszahlungsfunktion** u_i

$$u_i : A \to \mathbb{R}$$

G heißt endlich, falls A endlich ist.
Oft wird statt einer Auszahlungsfunktionen eine **Präferenzrelation** $\succeq_i$ für Spieler i genutzt:

$$a \succeq_i b \text{ gdw } u_i(a) \geq u_i(b)$$

Endliche strategische Spiele werden oft in **Matrixform** angegeben.

Spieler 1 \ Spieler 2	L	R
T	w_1, w_2	x_1, x_2
B	y_1, y_2	z_1, z_2

Abbildung 2.1: Ein strategisches Spiel in dem jeder Spieler zwischen zwei Aktionen wählen kann.

Wählt Spieler 1 T und Spieler 2 wählt L, dann erhält Spieler 1 w_1 und Spieler 2 w_2.
<u>Beispiel (Gefangenendilemma):</u>

$S \hat{=}$ Schweiger, $G \hat{=}$ Gesteher.

Spieler 1 \ Spieler 2	S	G
S	-3, -3	-120, 0
G	0, -120	-36, -36

Abbildung 2.2: Gefangenendilema. Auszahlung in Gefängnismonaten

Beispiel (Falke und Taube (Chicken/Angsthase)):

		Spieler 2: Taube	Spieler 2: Falke
Spieler 1	Taube	3, 3	1, 4
	Falke	4, 1	0, 0

Abbildung 2.3: Chicken/Angsthase

23.04.2004

Beispiel (Matching Pennies):

		Spieler 2: Kopf	Spieler 2: Zahl
Spieler 1	Kopf	1, -1	-1, 1
	Zahl	-1, 1	1, -1

Abbildung 2.4: Matching Pennies

Beispiel (Bach oder Strawinsky):

		Strawinsky-Fan: Bach	Strawinsky-Fan: Strawinsky
Bach-Fan	Bach	2, 1	0, 0
	Strawinsky	0, 0	1, 2

Abbildung 2.5: Bach oder Strawinsky

2.1. Dominierte Strategien

Sei $a = (a_i)_{i \in N}$ ein **Strategieprofil** ($a \in A = \times_{i \in N} A_i$).
Dann ist $a_{-i} := (a_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$ und $(a_{-i}, a_i) = (a_j)_{j \in (N \setminus \{i\}) \cup \{i\}} = (a_j)_{j \in N} = a$

Definition 1 (Strikt dominierte Strategie):
Eine Aktion $a_j^* \in A_j$ im Spiel $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ heißt strikt dominiert, falls es eine Aktion $a_j' \in A_j$ gibt, so dass für alle $a \in A$ gilt

$$u_j(a_{-j}, a_j') > u_j(a_{-j}, a_j^*)$$

Bemerkung 1:
Es ist nicht rational, strikt dominierte Strategien zu spielen!

2.1.1 Iterative Elimination

- Strikt dominierte Strategien streichen, so lange welche da sind.
- Bleibt nur ein Profil übrig, ist das die Lösung.

zwei Beispiele

	S	G
S	~~3,3~~	~~$\boxed{0}$,4~~
G	$\underline{4}$,0	$\boxed{1}$,1

	S	G
G	~~$\underline{4}$,0~~	$\boxed{1}$,1

	L	R
T	2,1	0,0
M	1,2	2,1
B	~~0,0~~	~~1,1~~

	L	R
T	2,1	~~0,0~~
M	1,2	~~2,1~~

	L
T	2,1
M	~~1,2~~

Bemerkung 2:
Nur in den seltensten Fällen existiert strikte Domininanz.

Bemerkung 3:
Das Ergebnis der iterativen Elimination ist bei strikter Dominanz eindeutig (unabhängig von der Reihenfolge der Elimination).

Definition 2 (Schwach dominierte Strategien):
Eine Aktion $a_j^* \in A_j$ im Spiel $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ heißt schwach dominiert, falls es eine Aktion $a_j' \in A_j$ gibt, so dass für alle $a \in A$ gilt

$$u_j(a_{-j}, a_j') \geq u_j(a_{-j}, a_j^*)$$

und für mindestens ein $a \in A$

$$u_j(a_{-j}, a_j') > u_j(a_{-j}, a_j^*)$$

<u>Beispiel:</u>

	L	R
T	1 2	0 0
M	1 2	1 1
B	0 0	1 1

Elimination: T ($\leq$ M), L ($\leq R$)
Ergebnis: $(1, 1)$
Alternativ: B ($\leq$ M), R($\leq L$)
Ergebnis: $(2, 1)$

27.04.2004

2.2. Nash-Gleichgewichte

Das meistbenutzte Lösungskonzept der Spieltheorie: Strategiekombination, in der kein Spieler durch Abweichung einen Vorteil erlangen kann.
<u>Beispiel:</u>

		Strawinsky-Fan	
		Bach	Strawinsky
Bach-Fan	Bach	1 2	0 0
	Strawinsky	0 0	2 1

Abbildung 2.6: Bach oder Strawinsky

zwei Nashgleichgewichte

Definition 1 (Nash-Gleichgewichte):
Ein **Nash-Gleichgewicht** (**NG**) eines strategischen Spieles $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ist ein Profil $a^* \in A$ von Aktionen mit der Eigenschaft, dass für alle Spieler $i \in N$ gilt:

$$u_i(a^*) = u_i(a^*_{-i}, a^*_i) \geq u_i(a^*_{-i}, a_i) \qquad \text{für alle } a_i \in A_i$$

Definition 2 (Alternative: Nash-Gleichgewicht):
Sei $B_i(a_{-i})$ die Menge von Aktionen $a_i \in A_i$, die die beste Reaktion auf a_{-i} sind:

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i | u_i(a_{-i}, a_i) \geq u_i(a_{-i}, a'_i), \text{ für alle } a'_i \in A_i\}$$

Ein Nash-Gleichgewicht a^* ist ein Profil mit der Eigenschaft

$$a^*_i \in B_i(a^*_{-i}) \qquad \text{für alle } i \in N$$

Wir betrachten auch $B(a^*)$:

$$B(a^*) = \bigtimes_{i \in N} B_i(a^*_{-i})$$

Mit dieser Notation ist α^* ein Nash-Gleichgewicht gdw. $\alpha^* \in B(\alpha^*)$.

		Spieler 2	
		S	G
Spieler 1	S	3 3	4 0
	G	0 4	**1** **1**

Abbildung 2.7: Gefangenendilema, Ein Nash-Gleichgewicht

		Spieler 2	
		Falke	Taube
Spieler 1	Falke	**3** **3**	4 1
	Taube	1 4	0 0

Abbildung 2.8: Falke und Taube, ein Nash-Gleichgewicht

		Spieler 2	
		Kopf	Zahl
Spieler 1	Kopf	1, -1	-1, 1
	Zahl	-1, 1	1, -1

Abbildung 2.9: Matching Pennies. Kein Nash-Gleichgewicht.

Beispiel (Auktionsspiel):

Ein Objekt soll an einen der Spieler für eine Bezahlung abgegeben werden. Die Spieler haben Wertvorstellungen über das Objekt der Art $v_1 > v_2 > \ldots > v_{|N|} > 0$. Es wird verdeckt geboten. Es erhält derjenige den Zuschlag, der das höchste Gebot abgegeben hat, wobei bei gleichen Geboten der Spieler mit dem niedrigeren Index gewinnt. Der Gewinner zahlt den höchsten gebotenen Preis: „**first-price sealed-bid auction**“

Spiel: $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$
N: Bieter
A_i: Gebote $b_i \in \mathbb{R}_0^+$
u_i: $u_i(b_{-i}, b_i) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{falls } i \text{ gewonnen hat} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
daraus folgt, niemand würde mehr zahlen, als ihm das Objekt wert ist.

Nash-Gleichgewicht(e) dieses Spiels:
Alle Profile $(b_i)_{i \in N}$ mit
$v_1 \geq b_1 \geq v_2$, $b_j = b_1$ für mindestens ein $j \in N \setminus \{1\}$
$b_i \leq b_1$ für alle $i \in N \setminus \{1\}$
Dies sind alle Nash-Gleichgewichte!

Beweis:

1. Spieler 1 gewinnt in allen Nash-Gleichgewichten (d.h. $b_1 \geq b_j$)

   Annahme: $i \neq 1$ gewinnt, d.h. $b_i > b_1$, $i \neq 1$

   (a) Sei $b_i > v_2$, dann $u_i(b) = (b_{-i}, b_i) = v_i - b_i < 0$ und Spieler i kann seinen Gewinn verbessern, wenn er $b_i = 0$ bietet.

   (b) Sei $b_i \leq v_2$, dann kann Spieler 1 seinen Gewinn verbessern, wenn er $b_1 = v_2 + \epsilon$ bietet

2. Sei b^* das höchste Gebot, dann muß $b^* \geq v_2$ sein, sonst hätte Spieler 2 gewinnen können und positiven Nutzen erhalten. Und: $b^* \leq v_1$, ansonsten könnte Spieler 1 durch Reduktion seinen Nutzen erhöhen

3. Es muss j mit $b_j = b_1$ geben, sonst könnte Spieler 1 reduzieren.

□

2.2.1 Interpretation von Nash-Gleichgewichten

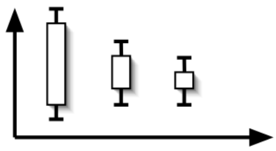
1. Resultiert die iterierte Eliminierung strikt dominierter Strategien in einer eindeutigen Strategiekombination, so ist dies ein Nash-Gleichgewicht des ursprünglichen Spiels - und das einzige. (vgl HA 2.2)

2. Ansonsten:

   - Deduktive/rationale Deutung:
     $\rightsquigarrow$ künstliche Agenten sind hier ideal!
     (zwei Probleme: mehr als ein Equilibrium/ Bestimmung des Equilibriums)

- Erfahrung/Lernen: Spieler tendieren auf Grund gemachter Erfahrung hin zu Nash-Gleichgewichten.

  (Beispiel Lotterie: setze auf 0...999 50 Cent und teile die Hälfte des eingesetzten Geldes durch alle Spieler, die richtig lagen. Durchschnittlicher Gewinn: $0,5 \cdot \frac{1000}{2}$ Dollar=250 Dollar. Bei Lotterie in New Jersey, kann man über die Jahre hinweg einen Trend feststellen, de zu gleichm"ßiger Auszahlung tendiert.

)

1. Existiert immer ein Nash-Gleichgewicht? Nein! Ja, wenn wir Strategien randomisieren.
2. Sind die Nash-Gleichgewichte eindeutig? Nein.
3. Sind Nash-Gleichgewichte einfach zu berechnen? Ja, im Matrixfall. Vermutlich nein für randomisierte Spiele.

30.04.2004

2.3. Strikt kompetitive Spiele und Maximin-Strategien

Definition 1 (Strikt kompetitive oder Nullsummen-Spiele):
Strikt kompetitive oder **Nullsummen-Spiele** sind strategische Spiele $\langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$, mit

$$u_1(a) = -u_2(a) \qquad \text{für alle } a \in A$$

Beispiel:

1. Matching Pennies

Spieler 2

Spieler 1		Kopf	Zahl
	Kopf	1, -1	-1, 1
	Zahl	-1, 1	1, -1

Abbildung 2.10: Matching Pennies

2.

	L	M	R
T	8, -8	3, -3	-6, 6
M	2, -2	-1, 1	3, -3
B	-6, 6	4, -4	8, -8

(Anm: kein Nash-Gleichgewicht, alles was mir nutzt, schadet dem anderen und vice versa. Versuche eigenen Schaden zu minimieren.

Bestimme jeweils z.B. für Spieler 1 Zeilenminimum $\Rightarrow [-6; -1; -6]$ also entscheidet sich dann der Rationale/Paranoide für M. Maximiere über Minimum. Für Spieler 2 erhält man $[-8-4-8]$. Dies ist ok für Paranoiker/Pessimisten, aber wenn man anfängt zu überlegen, dass der andere Spieler genau so denkt.... Also kein Nash-Gleichgewicht. Aber angenommen es gibt ein Nash-Gleichgewicht, dann wird dieses mit Maximinimierer erreicht, wie wir gleich sehen werden.)

Definition 2 (Maximinimierer):
Sei $G = \langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ ein Nullsummenspiel. Die Aktion $x^* \in A_1$ heißt **Maximinimierer (MM)** für Spieler 1 in G, falls

$$\min_{y\in A_2} u_1(x^*,y) \geq \min_{y\in A_2} u_1(x,y) \qquad \text{für alle } x \in A_1$$

und $y \in A_2$ heißt Maximinimierer für Spieler 2 in G falls

$$\min_{x\in A_1} u_2(x,y^*) \geq \min_{x\in A_1} u_2(x,y) \qquad \text{für alle } y \in A_2$$

(Anm: Bei unendlichen Spielen statt Maximum bzw. Minimum Supremum bzw. Infimum)

Bemerkung 1:
Wenn ein Nash-Gleichgewicht in einem Nullsummenspiel existiert, so ist dies eine Maximin-Kombination.
$\rightsquigarrow$ Was zu beweisen ist.

Lemma 1:
Sei $G = \langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ ein Nullsummenspiel, so gilt:

$$\max_{y\in A_2}\min_{x\in A_1} u_2(x,y) = -\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x,y)$$

<u>Beweis:</u>

Es gilt für beliebiges $f:\ \bullet \to \mathbb{R}$

$$f:\ \min_z(-f(z)) = -\max_z(f(z)) \qquad (*)$$

Damit für alle $y \in A_2$:

$$\begin{aligned} -\min_{x\in A_1} u_2(x,y) &\stackrel{*}{=} \max_{x\in A_1}(-u_2(x,y)) \\ &= \max_{x\in A_1}(u_1(x,y)) \qquad (**) \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \max_{y\in A_2}\min_{x\in A_1} u_2(x,y) &\stackrel{*}{=} -\min_{y\in A_2} -[\min_{x\in A_1} u_2(x,y)] \\ &\stackrel{**}{=} -\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x,y) \end{aligned}$$

□

Satz 1:
Sei $G = \langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ ein Nullsummenspiel. Dann:

(a) Falls (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht von G ist, dann sind x^* und y^* Maximinimierer für Spieler 1 bzw. Spieler 2.

(b) Falls, (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht ist, dann gilt:

$$\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y) = u_1(x^*,y^*)$$

(c) Falls $\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y)$ und x^* und y^* Maximinimierer von Spieler 1 bzw Spieler 2 sind, dann ist (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht.

04.05.2004

<u>Beweis:</u>

(a) Sei (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht.

$$\begin{array}{rrcll}
\Rightarrow & u_2(x^*,y^*) & \geq & u_2(x^*,y) & \text{für alle } y \in A_2 \\
\overset{u_1=-u_2}{\Rightarrow} & u_1(x^*,y^*) & \leq & u_1(x^*,y) & \text{für alle } y \in A_2 \\
\Rightarrow & u_1(x^*,y^*) & = & \min_{y\in A_2} u_1(x^*,y) & \\
& & \leq & \max_{x\in A_1}\min_{y\in A_2} u_1(x,y) & (+)
\end{array}$$

Außerdem:

$$\begin{array}{rcll}
u_1(x^*,y^*) & \geq & u_1(x,y^*) & \text{für alle } x \in A_1 \\
\Rightarrow u_1(x^*,y^*) & \geq & \min\limits_{y\in A_2} u_1(x,y) & \text{für alle } x \in A_1 \quad (++) \\
\Rightarrow u_1(x^*,y^*) & \geq & \max\limits_{x\in A_1}\min\limits_{y\in A_2} u_1(x,y) & (+++) \\
(+),(+++) \Rightarrow u_1(x^*,y^*) & = & \max\limits_{x\in A_1}\min\limits_{y\in A_2} u_1(x,y) & (++++)
\end{array}$$

$\Rightarrow x^*$ ist Maximinimierer.

Analog für Spieler 2:

$$\begin{array}{rcl}
u_2(x^*,y^*) & = & \max\limits_{y\in A_2}\min\limits_{x\in A_1} u_2(x,y) \\
u_2(x^*,y^*) & = & \max\limits_{x\in A_1} u_2(x,y^*)
\end{array}$$

$\Rightarrow y^*$ ist Maximinimierer. Daraus folgt a)

(b)

$$\begin{array}{rcl}
u_2(x^*,y^*) & \overset{\text{Lemma}}{=} & -\min\limits_{y\in A_2}\max\limits_{x\in A_1} u_1(x,y) \\
\Rightarrow u_1(x^*,y^*) & = & \min\limits_{y\in A_2}\max\limits_{x\in A_1} u_1(x,y) \\
& \overset{(++++)}{=} & \max\limits_{x\in A_1}\min\limits_{y\in A_2} u_1(x,y)
\end{array}$$

Daraus folgt b)

(Anm: Daraus folgt insbesondere auch, dass alle Nash-Gleichgewichte für alle Spieler denselben Nutzen haben)

(c)

$$\begin{array}{rcl}
v^* & := & \max\limits_{x\in A_1}\min\limits_{y\in A_2} u_1(x,y) = \min\limits_{y\in A_2}\max\limits_{x\in A_1} u_1(x,y) \\
\overset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} -v^* & = & \max\limits_{y\in A_2}\min\limits_{x\in A_1} u_2(x,y)
\end{array}$$

Da x^* Maximinimierer: $u_1(x^*,y) \geq v^*$ f.a. $y \in A_2$ $\boxdot$

Da y^* Maximinimierer: $u_2(x,y^*) \geq -v^*$ f.a. $x \in A_1$ $\odot$

$$\overset{\text{Setze } x=x^*,\ y=y^*}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{rcr}
u_1(x^*,y^*) & \geq & v^* \\
u_2(x^*,y^*) & \geq & -v^* \\
\Rightarrow u_1(x^*,y^*) & \leq & v^*
\end{array}\right\} u_1(x^*,y^*) = v^*$$

$$\begin{array}{rrcll}
\text{wegen } \boxdot & u_1(x^*,y) & \geq & u_1(x^*,y^*) & \text{für alle } y \in A_2 \\
& u_2(x^*,y) & \leq & u_2(x^*,y^*) & \text{für alle } y \in A_2
\end{array}$$

$\Rightarrow y^*$ beste Antwort auf x^*.

$$\text{wegen } \odot \;\; u_1(x,y^*) \leq u_1(x^*,y^*) \qquad \text{für alle } x \in A_1$$

$\Rightarrow x^*$ beste Antwort auf y^*

$\Rightarrow (x^*, y^*)$ ist Nash-Gleichgewicht.

(Anm: Insgesamt folgt, wenn es mehrere NG gibt, so kann man sich immer eines aussuchen.)
(Anm: Strikt kompetitive Spiele sind im Wesentlichen für Brettspiele interessant, jedoch nicht für die Wirtschaft.)

$\square$

Kapitel 3

Gemischte und korrelierte Strategien

Motivation: Was tun bei Nicht-Existenz von Nash-Gleichgewichten?
$\rightsquigarrow$ randomisierte Strategien!
Notation:
$\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ Spiel.

- $\Delta(A_i)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen über der Menge A_i
  „gemischte Strategien“ $\alpha_i \in \Delta(A_i)$
  $\alpha_i(a_i)$ Wahrscheinlichkeit für die Wahl von $a_i \in A_i$

- Ein Profil $(\alpha_i)_{i \in N} \in \times_{i \in N} \Delta(A_i)$ induziert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $A = \times_{i \in N} A_i$ wie folgt:
  $$p(a) = \prod_{i \in N} \alpha_i(a_i)$$
  Für $A' \subseteq A = \times_{i \in N} A_i$:
  $$p(A') = \sum_{a \in A'} p(a) = \sum_{a \in A'} \prod_{i \in N} \alpha_i(a_i)$$

Beispiel:

		Spieler 2	
		Kopf	Zahl
Spieler 1	Kopf	-1 1	1 -1
	Zahl	1 -1	-1 1

Abbildung 3.1: Matching Pennies

Für Spieler 1 betrachte die gemischte Strategie: $\alpha_1 \in \Delta(\{K, Z\})$

$$\alpha_1(K) = \frac{2}{3},\ \alpha_1(Z) = \frac{1}{3}$$

Für Spieler 2 betrachte die gemischte Strategie: $\alpha_2 \in \Delta(\{K, Z\})$

$$\alpha_2(K) = \frac{1}{3},\ \alpha_2(Z) = \frac{2}{3}$$

$$p(K, K) = \alpha_1(K) \cdot \alpha_2(K) = \frac{2}{9} \xrightarrow{u_1} +1$$

$$p(K,Z) = \alpha_1(K) \cdot \alpha_2(Z) = \frac{4}{9} \to -1$$
$$p(Z,K) = \alpha_1(Z) \cdot \alpha_2(K) = \frac{1}{9} \to -1$$
$$p(Z,Z) = \alpha_1(Z) \cdot \alpha_2(Z) = \frac{2}{9} \to +1$$

Notation: „erwarteter Nutzen"

$$U_i(\alpha) = U_i((\alpha_j)_{j\in N}) := \sum_{a\in A} \underbrace{\left(\prod_{j\in N} \alpha_j(a_j)\right)}_{=p(a)} u_i(a)$$

Im Beispiel:

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{9}$$
$$U_2(\alpha_1, \alpha_2) = +\frac{1}{9}$$

Notation: Sei α_i eine gemischte Strategie. Die **Unterstützungsmenge** (**support**) von α_i ist die Menge

$$supp(\alpha_i) = \{a_i \in A_i | \alpha_i(a_i) > 0\}$$

Definition 3 (gemischte Erweiterung):
Die **gemischte Erweiterung** eines strategischen Spiels $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ist das Spiel $\langle N, (\Delta(A_i)), (U_i)\rangle$, in dem $\Delta(A_i)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen über den Aktionen A_i ist und U_i der erwartete Nutzen über α_i, $U_i : \times_{j\in N} \Delta(A_j) \to \mathbb{R}$ jedem $\alpha \in \times \Delta_{j\in N}(A_j)$ den erwarteten Nutzen für Spieler i unter der von α induzierten Wahrscheinlichkeitsverteilung (der erwartete Nutzen von α) zuordnet.

Definition 4 (Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien):
Sei G ein strategisches Spiel. Ein **Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien** von G ist ein Nash-Gleichgewicht der gemischten Erweiterung von G. 11.05.2004

Satz 2 (Satz von Nash):
Jedes endliche strategische Spiel hat ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Beweisidee:

Betrachte mengenwertige Funktion (= Korrespondenz) der besten Antworten:

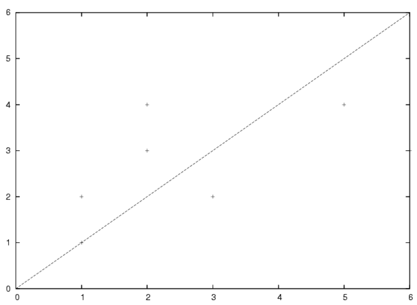
$$B: \mathbb{R}^{\sum_i |A_i|} \to 2^{\mathbb{R}^{\sum_i |A_i|}}$$

(Anm: 2^x Potenzmenge, Menge aller Teilmengen.)

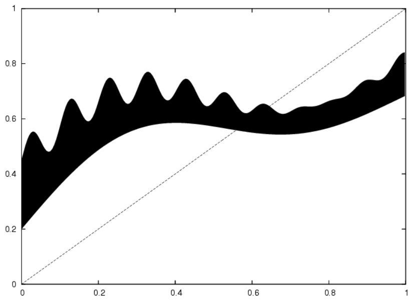
$$B(\alpha) = \times_{i\in N} B_i(\alpha_{-i})$$

α ist Fixpunkt der Korrespondenz B

$$\Leftrightarrow \quad \alpha \in B(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha \text{ ist Nash-Gleichgewicht}$$



Der Graph unserer Korrespondenz sollte „zusammenhängend" sein.



Dann liegen Punkte auf der Fixpunktdiagonalen.

□

Erinnerung:
Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist **kompakt**, wenn

1. sie **beschränkt** ist, d.h. es gibt obere und untere Schranken
2. und wenn sie außerdem **abgeschlossen** ist, d.h. jede konvergente Folge von Elementen aus X hat den Grenzwert in X.

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist **konvex**, wenn für $x, y \in X$ und beliebiges $\lambda \in [0,1]$ gilt:

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in X$$

Eine Korrespondenz $f : X \to 2^Y$ ist **ober-hemi-stetig**, falls ihr Graph

$$G(f) = \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in f(x)\}$$

eine abgeschlossene Menge ist.
Eine Funktion $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist **quasi-konkav**, falls für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt: die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq z\}$ ist konvex.

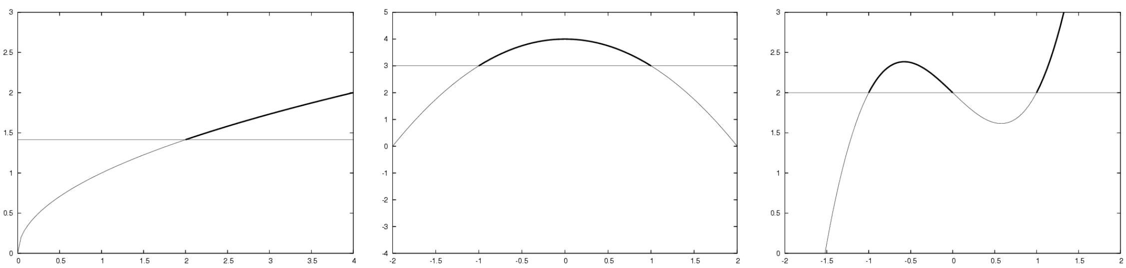


Abbildung 3.2: Die ersten beiden Graphen sind konvex, der dritte nicht.

Satz 3 (Fixpunktsatz von Kakutani):
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere, kompakte und konvexe Menge und sei außerdem $f:\ A \to 2^A$ eine ober-hemi-stetige Korrespondenz, so daß $f(x) \subseteq A$ eine nicht-leere, konvexe Menge für jedes $x \in A$ ist. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in A$ mit $x \in f(x)$.
ohne Beweis.

Beweis:(des Satzes von Nash):
Zeige, daß der „Satz von Kakutani" anwendbar ist.

(1) $\times_i \Delta(A_i)$ ist nicht-leer, konvex und kompakt.
(vgl. HA 3.2.1 **??**)

(2) U_i ist für fixes α_{-i} linear in eigener gemischten Strategie, d.h. $\beta_i, \gamma_i \in \Delta(A_i)$ gilt:

$$U_i(\alpha_{-i}, \lambda\beta_i + (1-\lambda)\gamma_i) = \lambda U_i(\alpha_{-i}, \beta_i) + (1-\lambda)U_i(\alpha_{-i}, \gamma_i) \qquad \text{für } \lambda \in [0,1] \quad (*)$$

(Anm: Mögliche Interpretation: Man spielt Metastrategie: mit Wahrscheinlichkeit λ spielt man β_i und mit Wahrscheinlichkeit $(1-\lambda)$ spielt man γ_i)

Daraus folgt U_i stetig in $\Delta(A_i)$.

Stetige Funktionen auf kompakten Mengen haben ihr Maximum in der Menge.

$\Rightarrow B_i(\alpha_{-i})$ ist eine nicht-leere Menge. $B(\alpha)$ ist nicht leer.

(3) $B(\alpha)$ ist konvex, da $B_i(\alpha_i)$ konvex ist:
Sei $\alpha_i', \alpha_i'' \in B_i(\alpha_{-i})$, d.h.
$$U_i(\alpha_{-i}, \alpha_i') = U_i(\alpha_{-i}, \alpha_i'')$$
wegen (*) gilt dann auch
$$\lambda\alpha_i' + (1-\lambda)\alpha_i'' \in B_i(\alpha_{-i})$$

(4) z.z.: (α^n, β^n) Folge in $Graph(B)$ mit $\lim_{n\to\infty}(\alpha^n, \beta^n) = (\alpha, \beta)$. Dann $(\alpha, \beta) \in Graph(B)$.

<u>Beweis:</u>

Sei α^n, β^n, α, $\beta \in \times_{i\in N} \Delta(A_i)$ mit $\beta^n \in B(\alpha^n)$, $\lim_{n\to\infty}(\alpha^n, \beta^n) = (\alpha, \beta)$.
Dann gilt für alle $i \in N$:

$$\begin{aligned}
u_i((\beta_i, \alpha_{-i})) &\overset{\text{Def. } \alpha,\ \beta}{=} u_i(\lim_{n\to\infty}(\beta_i^n, \alpha_{-i}^n)) \\
&\overset{\text{Stetigkeit}}{=} \lim_{n\to\infty} u_i((\beta_i^n, \alpha_{-i}^n)) \\
&\overset{\beta_i^n \text{ beste Antwort auf } \alpha_{-i}^n}{\geq} \lim_{n\to\infty} u_i((\beta_i', \alpha_{-i}^n)) \qquad \text{für alle } \beta_i' \in \Delta(A_i) \\
&\overset{\text{Stetigkeit}}{=} u_i((\beta_i', \lim_{n\to\infty} \alpha_{-i}^n)) \qquad \text{für alle } \beta_i' \in \Delta(A_i) \\
&\overset{\text{Def. } \alpha_i}{=} u_i((\beta_i', \alpha_{-i}))
\end{aligned}$$

$\hookrightarrow \beta_i$ beste Antwort auf α_{-i} für alle $i \in N$

$\hookrightarrow \beta \in B(\alpha)$

$\hookrightarrow (\alpha, \beta) \in G(B)$.

□

□

Satz 4 (Verallgemeinerung des Satzes von Nash):
Sei $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ein strategisches Spiel, so dass für jedes $i \in N$

1. A_i eine nicht-leere, konvexe und kompakte Menge ist und
2. u_i stetig in A und quasi-konkav in A_i ist

Dann besitzt G ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien.

<u>Beweisidee:</u>

Ähnlich wie „Nash", Quasi-Konkavität von u_i impliziert Konvexität der Antwortmenge.

□ 14.05.2004

Lemma 2:
Sei $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ein endliches strategisches Spiel. Dann ist $\alpha^* \in \times_{i\in N} \Delta(A_i)$ ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien gdw. für jeden Spieler $i \in N$ jede reine Strategie aus der Unterstützungsmenge von α_i^* eine beste Antwort auf α_{-i}^* ist.
(Anm: Für den einzelnen Spieler ist es egal, ob er die gemischte Strategie spielt oder eine Einzelaktion daraus spielt.)

<u>Beweis:</u>

$\Rightarrow$:

Sei α^* Nash-Gleichgewicht mit $a_i \in supp(\alpha_i^*)$ aber a_i ist keine beste Antwort auf α_{-i}^*. Wegen der Linearität von U_i kann Spieler i seine Auszahlung verbessern, wenn er Gewicht von a_i auf andere Aktionen in $supp(\alpha_i^*)$ verteilt.

$\rightsquigarrow$ D.h. α_i^* war keine beste Antwort.

$\rightsquigarrow$ D.h. α^* war kein Nash-Gleichgewicht $\rightsquigarrow$ Widerspruch.

$\Leftarrow$:

(wir zeigen Kontraposition):

Sei α_i' eine Strategie mit der Eigenschaft $U_i(\alpha_{-i}^*, \alpha_i') > U_i(\alpha_{-i}^*, \alpha_i^*)$ für ein $i \in N$. Wegen der Linearität von U_i muss es eine Aktion $a_i' \in supp(\alpha_i')$ geben, die höheren Nutzen als eine Aktion $a_i'' \in supp(\alpha_i^*)$ hat.

D.h., dass $supp(\alpha_i^*)$ nicht nur beste Antworten auf α_{-i}^* besitzt.

$\square$

<u>Beispiel:</u>

		Strawinsky-Fan	
		Bach	Strawinsky
Bach-Fan	Bach	1 2	0 0
	Strawinsky	0 0	2 1

Abbildung 3.3: Bach oder Strawinsky

Allgemein: Vier mögliche Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien.

mögliche echte gemischte Strategien:

$$\begin{array}{lll} \{B\} & \text{vs.} & \{B,S\} \\ \{S\} & \text{vs.} & \{B,S\} \\ \{B,S\} & \text{vs.} & \{B\} \\ \{B,S\} & \text{vs.} & \{S\} \\ \{B,S\} & \text{vs.} & \{B,S\} \end{array}$$

Wenn Nash-Gleichgewicht in gemischter Strategie $\{B\}$ vs. $\{B,S\}$ dann müssten in reinen B, B und B, S auch Nash-Gleichgewichte sein. Also ist nur $\{B,S\}$ vs $\{B,S\}$ interessant.
Bei „Bach oder Strawinsky“ gibt es zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien, nämlich B, B und S, S.
Wie sieht ein (echtes) gemischtes Nash-Gleichgewicht für „Bach oder Strawinsky“ aus?
Annahme: (α_1, α_2) ist das Nash-Gleichgewicht mit $0 < \alpha_1(B) < 1$ und mit $0 < \alpha_2(B) < 1$.

$$U_1((1,0),(\alpha_2(B),\alpha_2(S))) = U_1((0,1),(\alpha_2(B),\alpha_2(S)))$$

Wenn Spieler 1 B spielt:

$$2 \cdot \alpha_2(B) + 0 \cdot \alpha_2(S)$$

Wenn Spieler 1 S spielt:

$$\begin{aligned} 0 \cdot \alpha_2(B) + 1 \cdot \alpha_2(S) &= 1 \cdot (1 - \alpha_2(B)) \\ \Rightarrow 2 \cdot \alpha_2(B) &= 1 - \alpha_2(B) \\ \Rightarrow \alpha_2(B) &= \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \alpha_2(S) &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Analog für Spieler 1:

$$\begin{aligned} \alpha_1(B) &= \frac{2}{3} \\ \alpha_1(S) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

18.05.2004 Man kann leicht überprüfen, dass es sich tatsächlich um ein Nash-Gleichgewicht handelt.

Beispiel:

Die Spieler wählen Zahlen aus $\{1, \ldots, K\}$. Ein fixer Preis wird zu gleichen Teilen zwischen den Spielern aufgeteilt, die dem Wert $\frac{2}{3|N|} \sum_{l=1}^{|N|} a_l$ am nächsten kommen (Anm: $\frac{2}{3}$ des Durchschnitts)
.
Es existiert ein reines Nash-Gleichgewicht bei $a_l = 1$ für alle $l \in \{1, \ldots, |N|\}$.
Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien?

1) Annahme: es gibt ein weiteres Nash-Gleichgewicht α (in gemischten Strategien)

2) Dann existiert ein maximales $k^* > 1$, das von mindestens einem Spieler mit Wahrscheinlichkeit größer 0 gespielt wird.

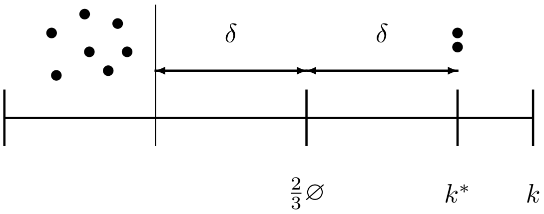
3) Annahme: Spieler i spielt k^* ($\hat{=}$ hat k^* in Unterstützermenge)

4) $U_i(k^*, \alpha_{-i}) > 0$, da k^* so viel wie alle anderen Strategien in der Unterstützungsmenge erbringen muss.

5) Sei a eine Realisierung von α mit $a_i = k^*$ und $u_i(\alpha) > 0$. Dann muss mindestens ein anderer Spieler j auch k^* spielen, denn nicht alle anderen Spieler können $a_l \leq \frac{2}{3|N|} \sum_h a_h$ spielen.

   Auch der Fall $\frac{2}{3|N|} \sum_h a_h \leq a_j < k^*$ kann ausgeschlossen werden, da i nicht gewonnen hätte!

   Kein Spieler kann höher als k^* spielen, da k^* maximal ist.



6) In dieser Situationen könnte i sich verbessern, wenn er $k^* - 1$ spielt (für $k^* \geq 2$).

   (Anm: er kommt dem Durchschnitt dadurch um $\frac{1}{|N|}$ näher. Darum ...)

7) D.h. es ist immer besser $k^* - 1$ zu spielen, d.h. k^* kann nicht in der Unterstützungsmenge liegen, d.h. α kann kein Nash-Gleichgewicht sein.

$\rightsquigarrow$ Es gibt nur das Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien: $(1, \ldots, 1)$.

3.1. Algorithmen für die Nash-Gleichgewichts-Bestimmung in Nullsummenspielen

Exkurs: Lineare Programmierung/Lineare Optimierung
[„Lineare Programmierung“ geprägt in den 30er Jahren - bevor Computer programmiert wurden, damals bedeutete Programmierung Planung (vgl. dynamische Programmierung)]
(Anm: vgl. in Kapitel 6)
Worum geht es: Lineare Ungleichungen über n reellwertige Variablen und eine lineare Zielfunktion, die man maximieren möchte.
Beispiel („Sortimentproblem“):

Es werden zwei Sortimente eines Artikels produziert, die alle verkauft werden können.

Sortiment 1:	25 Min Schneiden, 60 Minuten Zusammenbauen, 68 Minuten Postprocessing. 30 Euro pro Artikel
Sortiment 2:	75 Minuten Schneiden, 60 Minuten Zusammenbau und 34 Minuten Postprocessing 40 Euro Gewinn.
Pro Tag:	450 Minuten Zuschneiden, 480 Minuten Zusammenbau, 476 Minuten Postprocessing

Wie maximiert man den Gewinn?
x: Anzahl Artikel in Sortiment 1
y: Anzahl Artikel in Sortiment 2

1. $x \geq 0$, $y \geq 0$ und
2. $25x + 75y \leq 450 \Rightarrow y \leq \underbrace{\frac{450}{75}}_{=6} - \underbrace{\frac{25x}{75}}_{1/3} \Rightarrow y \leq 6 - \frac{1}{3}x$
3. $60x + 60y \leq 480 \Rightarrow y \leq 8 - x$
4. $68x + 34y \leq 476 \Rightarrow y \leq 14 - 2x$
5. Maximiere $z = 30x + 40y$

Ungleichungen (1)-(4) beschreiben zulässige Lösungen.
(5) ist die *Zielfunktion* (objective function).
(1)-(4) beschreiben *konvexe* Menge in $\mathbb{R}^2$.

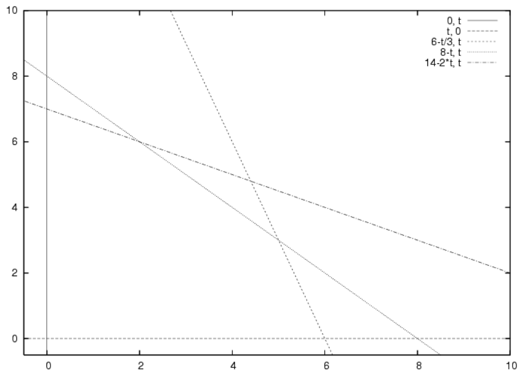


Abbildung 3.4: $\rightsquigarrow$ zulässige Lösungen (feasible solution)

$$y = \frac{z}{40} - \frac{3x}{4}$$

Die Zielfunktion gibt für jeden Punkt eine Qualität:

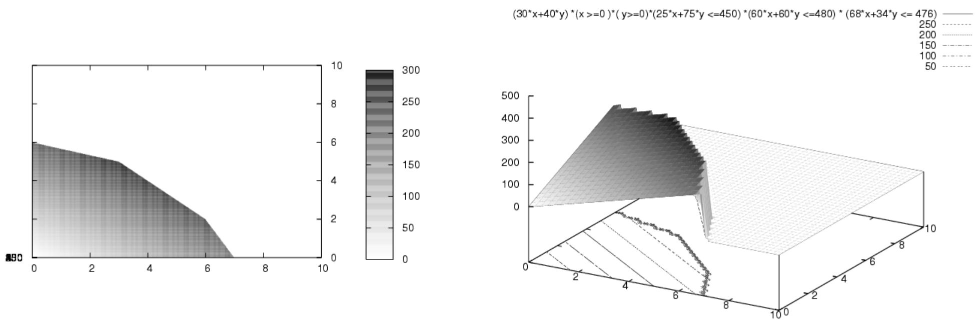


Abbildung 3.5: Isolinien für verschiedene z-Werte.

Allgemein (Standardform):

n	Variablen x_i (reellwertig)
m	Koeffizienten b_j
m	Konstanten c_j
$m \times n$	Koeffizienten a_{ij} für Gleichungen
m	Gleichungen

$c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$

Zielfunktion:

$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$(für $x_i \geq 0$) zu minimieren.

(Anm: man kann statt Ungleichungen Gleichungen wählen, da: $x+y \leq c \Leftrightarrow x+y+\underbrace{z}_{\textbf{Slack-Variable}} = c$ für ein $z \geq 0$)

Simplex-Methode: Standardlösungsmethode, um LPs zu lösen. Diese Methode ist im schlechtesten Fall exponentiell. In allen praktischen Fällen ist es aber „gutmütig"!

Anwendung auf Nullsummenspiele:

Satz von Nash:

Nash-Gleichgewichte existieren in gemischten Strategien.

Maximin-Satz:

Falls Nash-Gleichgewicht existiert, dann ist es ein Paar von Maximinimierern. $A_1 = \{a_{11}, \ldots, a_{1n}\}$, $A_2 = \{a_{21}, \ldots, a_{2m}\}$

Spieler 1 sucht gemischte Strategie α_1.

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_1(a_{11}) \cdot u_1(a_{11}, a_{2i}) \geq u \qquad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, m\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_1(a_{1j}) = 1$$

$$\alpha_1(a_{1j}) \geq 0 \qquad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\}$$

Maximiere u. Die Lösung dieses LPs ist ein Maximinimierer für Spieler 1. Analog für Spieler 2. 21.05.2004

(Anm: Erinnerung: Lösen von Nullsummenspielen durch lineare Programme. Für jedes α von Spieler 1 bestimme schlimmste Antwort des Gegners, dann maximiere darüber

$$U_1(\alpha, b_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha(a_i) \cdot u_1(a_i, b_j) \geq u \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n$$

Maximiere u!

Für β entsprechend.

Wegen: Maximin = Minimax für Nullsummenspiele, die ein Nash-Gleichgewicht besitzen:

$$U_1(a_i, \beta) \leq u \qquad \forall i: \ 1 \leq i \leq m$$

Minimiere U.

Für β entsprechend.

Mit $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$)

3.2. Algorithmen für allgemeine Zweipersonenspiele

Für allgemeine Spiele funktioniert die LP-Methode nicht. Stattdessen **LCP** (**Linear complementarity problem**): Lineare Constraints und einen Typ zusätzlicher Bedingungen. Zwei Gruppen von Variablen $\{x_1, \ldots, x_k\}$, $\{y_1, \ldots, y_k\}$

mit Constraints: $x_i \cdot y_i = 0 \quad \forall i: \ 1 \leq i \leq k$

oder äquivalent

$$x_i = 0 \vee y_i = 0$$

und keine Optimierungsbedingung. Damit sind Nash-Gleichgewichte für beliebige zwei Personenspiel beschreibbar. Seien (u, v) die Auszahlungen im gemischten Nash-Gleichgewicht (α, β) Dann muß gelten:

(1) $u - U_1(a_i, \beta) \geq 0 \quad \forall i: \ 1 \leq i \leq m$

(2) $v - U_2(\alpha, b_j) \geq 0 \quad \forall j: \ 1 \leq i \leq n$

(3) Weiter muß gelten:

$$\underbrace{\alpha(a_i)}\cdot\underbrace{(u - U_1(a_i,\beta))} = 0 \quad \forall i$$

(a) $\alpha(a_i) = 0$ gilt, falls a_i nicht im Support der Gleichgewichtsstrategie

(b) $u - U_1(a_i,\beta) = 0$ gilt, falls a_i eine beste Antwort auf β ist (wegen (1))
$\rightsquigarrow$ gilt, falls a_i im Support der Gleichgewichtsstrategie ist.

[Kann in LCP-Normalform umgeformt werden, mit zusätzlichen Variablen.]

(4) $\beta(b_j) \cdot (v - U_2(\alpha, b_j)) = 0 \quad \forall j$

(5) $\alpha(a_i) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha(a_i) = 1$

(6) $\beta(b_j) \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} \beta(b_j) = 1$

Satz 1:
Ein Profil in gemischten Strategien (α,β) mit Auszahlung (u,v) ist Nash-Gleichgewicht gdw. eine Lösung des LCPs (1)-(6) (α,β), (u,v) ist.

Nash-Gleichgewicht $\Rightarrow$ "Lösung des LCPs" ✓
"LCP-Lösung" $\Rightarrow$ Nash-Gleichgewicht:

1. α, β sind gemischte Strategien folgt aus (5)+(6)

2. Wenn reine Strategie a_i gespielt wird ($\alpha(a_i) > 0$), dann ist die Auszahlung (als Reaktion auf β) u wegen (3).

3. u ist das Maximum aller möglichen reinen Antworten, wegen (1).

4. D.h. (α,β) sind beste Antworten aufeinander mit Auszahlung (u,v)

   $\rightsquigarrow$ Nash-Gleichgewicht.

25.05.2004

Wie lost man ein LCP? **Naiver Algorithmus:**

1. Rate *supp*(α) und *supp*(β). (z.B. durch vollständige Aufzählung aller $2^n \cdot 2^m$ Möglichkeiten)

2. Konvertiere LCP in ein lineares Programm. (1), (2), (5), (6) $\rightsquigarrow$ sind bereits lineare Constraints (3) für $\alpha(a_i)(u - U_1(a_i,\beta)) = 0$:

   - falls $a_i \in \mathit{supp}(\alpha)$: neuer linearer Constraint $u - U_1(a_i,\beta) = 0$

   - sonst: neuer linearer Constraint $\alpha(a_i) = 0$

   (4) genauso wie bei (3)

   Optimierungsfunktion: 0

   (Anm: Wir benöetigen eine beliebige, von den Constraints unabhängige Optimierungsfunktion, da die Kriterien, die optimiert werden sollen, bereits in den Constraints stehen.)

3. Verwende LP-Solver

Laufzeit: $O(p(n+m) \cdot 2^{n+m})$, wobei p ein geeignetes Polynom ist.
<u>Besser:</u> Lemke-Howson-Algorithmus
<u>Frage:</u> $LCP \in P$? Dies ist ein offenes Problem, aber es liegt auf jeden Fall in NP.

3.3. Evolutionäre Gleichgewichte

Idee:

- Spieler sind biologische Organismen, die derselben Art angehören
- Den Organismen stehen verschiedene Strategien zur Verfügung.
- Die Aktionsauswahl wird durch „Natur“ (Vererbung, Mutation) getroffen.
- Der Nutzen entspricht den Überlebenschancen.

Frage: Gibt es Strategien, die „evolutionär stabil“ sind, d.h. ein stabiles Gleichgewicht in der Population herstellen, in dem Mutationen „unattraktiv“ sind?
Modellierung:

- Wir betrachten nur Zwei-Personenspiele, die für die „Begegnung“ zweier Individuen stehen, d.h. $N = \{1, 2\}$.
- Die Individuen gehören derselben Art an, daraus folgt, dass $A_1 = A_2$ und $u_1(a, b) = u_2(b, a)$ ($\rightsquigarrow u_1 = \mathbf{u}$)
- Gemischte Strategien entsprechen gemischten Populationen.
- Eine Strategie $b^* \in B$ (Anm: b statt a für Aktion in diesem Abschnitt. (b)ehavior) ist evolutionär stabil, wenn sie gegen Mutationen resistent ist. Wenn ein kleiner Anteil $\epsilon > 0$ an Individuen mutiert, d.h. $b \in B \setminus \{b^*\}$ wählt, soll sich trotzdem b^* durchsetzen:

  $$(1-\epsilon)u(b, b^*) + \epsilon u(b, b) < (1-\epsilon)u(b^*, b^*) + \epsilon u(b^*, b)$$

  für kleines ϵ äquivalent:

  $$u(b, b^*) < u(b^*, b^*)$$

  oder

  $$u(b, b^*) = u(b^*, b^*) \text{ und } u(b, b) < u(b^*, b)$$

Definition 1 (symmetrische strategische Spiele):
Ein strategisches Spiel $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ heißt **symmetrisch**, falls $N = \{1, 2\}$, $A_1 = A_2$ und $u_1(a, b) = u_2(b, a)$ für alle $a, b \in A_1$ gilt.
$B := A_1$ $(= A_2)$ heißt Aktionsmenge von G,
$u := u_1$ heißt Nutzen- oder Auszahlungsfunktion von G.
Definition 2:
Sei G ein symmetrisches strategisches Spiel mit Aktionsmenge B und Nutzenfunktion u. Eine Strategie $b^* \in B$ heißt **evolutionär stabil**, falls gilt

- (b^*, b^*) ist ein Nash-Gleichgewicht von G und
- für alle besten Antworten $b \in B$ auf b^* mit $b \neq b^*$:

  $$u(b, b) < u(b^*, b).$$

Beispiel (Falke oder Taube):

mit reellem Parameter $c \geq 0$ (für Verlust bei einem Kampf)

	T	F
T	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$	0, 1
F	1, 0	$\frac{1}{2}(1-c)$, $\frac{1}{2}(1-c)$

$c < 1$: (F, F) einziges Nash-Gleichgewicht.
  $\rightsquigarrow$ strikt dominante Strategie
  $\rightsquigarrow$ es gibt keine weitere Beste Antwort
  $\rightsquigarrow$ F evolutionär stabil
$c = 1$: Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien (T, F), (F, T), (F, F)
  Betrachte (F, F) (Anm: beide Spieler müssen sich gleich verhalten) beste Antwort T:
  $u(T, T) = \frac{1}{2} < u(F, T) = 1$
  $\rightsquigarrow$ evolutionär stabil
$c > 1$ Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien(T, F), (F, T)
  gemischt $(\underbrace{\{T \mapsto 1 - \frac{1}{c}, F \mapsto \frac{1}{c}\}}_{b^*}, \underbrace{\{T \mapsto 1 - \frac{1}{c}, F \mapsto \frac{1}{c}\}}_{b^*})$
  Beste Antworten: Betrachte T, F
  b=T: $u(b, b) = \frac{1}{2}$
    $u(b^*, b) = (1 - \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{c} \cdot 1 > \frac{1}{2}$ ✓
  b=F: $u(b, b) = \frac{1}{2}(1 - c)$
    $u(b^*, b) = (1 - \frac{1}{2}) \cdot 0 + \frac{1}{c}\frac{1}{2})(1 - 2) > \frac{1}{2}(1 - c)$ ✓
  $\rightsquigarrow$ b^* ist evolutionär stabil.

Anmerkung: Hier haben wir nur **reine** Strategien als abweichende beste Antworten b betrachtet.
Bei Spielen mit zwei Aktionen ist die auch ausreichend (ohne Beweis), ab drei Aktionen müssen
28.05.2004 aber unter Umständen auch gemischte Strategien berücksichtigt werden.
Aus der Definition von evolutionär stabile Strategien folgt, dass symmetrische Nash-Gleichgewichte (b^*, b^*), für die es keine andere beste Antwort gibt, evolutionär stabile Strategien sein müssen.
Nicht-strikte NGs müssen nicht unbedingt evolutionär stabile Strategien sein.
Beispiel:

	1	2	3
1	γ, γ	1, -1	-1, 1
2	-1, 1	γ, γ	1, -1
3	1, -1	-1, 1	γ, γ

mit reellem Parameter $0 < \gamma < 1$
$\alpha_1 = \alpha_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ist Nash-Gleichgewicht.
Auszahlung: $\frac{\gamma}{3}$
Ist aber keine evolutionär stabile Strategie!
Ein Mutant könnte die reine Strategie „1“ spielen.
(Anm: oder eine beliebige andere reine Strategie)
Gegen „Normale“ erhält er $\frac{\gamma}{3}$
Andere Mutanten spielen auch „1“ Auszahlung γ!
$\rightsquigarrow$ D.h. α_i ist keine evolutionär stabile Strategie

3.4. Korrelierte Nash-Gleichgewichte

Idee: Man benutzt einen „öffentlich sichtbaren“ Würfel, um bei gemischten Strategien zu entscheiden, welche Aktion gespielt wird.
$\rightsquigarrow$ Man kann höhere Auszahlung erhalten.

		Strawinsky-Fan	
		Bach	Strawinsky
Bach-Fan	Bach	1 2	0 0
	Strawinsky	0 0	2 1

Abbildung 3.6: Bach oder Strawinsky

Bei Bach oder Stravinsky sind die Nash-Gleichgewichte $((B, B)$, (S, S) mit Auszahlung $2, 1$ oder $1, 2$ und in gemischten Strategien zusätzlich

$$((B \mapsto \frac{1}{3}, S \mapsto \frac{2}{3}), (B \mapsto \frac{2}{3}, S \mapsto \frac{1}{3}))$$

mit Auszahlung $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$.
Bei einem gemeinsamen Würfel kann $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$ erreicht werden.
<u>weitere Idee:</u> Nicht alle Zufallsergebnisse sind sofort sichtbar!
$\leadsto$ Nachdem man alles formalisiert:

- $\rightarrow$ Alle Nash-Gleichgewichte sind auch korrelierte Gleichgewichte.

- $\rightarrow$ Man kann höhere Auszahlungen bekommen.

08.06.2004

Kapitel 4

Extensive Spiele mit perfekten Informationen

Motivation: In Spielen hat man oft mehrere Züge hintereinander.
Spiel: Das Spiel ist dann beschrieben durch einen Spielbaum. Eine Strategie ist keine Aktion.
Strategie: Für jeden Entscheidungspunkt im Spielbaum wird vorgeschrieben, welche Aktion gewählt wird.
$\rightsquigarrow$ Die extensive Form eines Spiels kann man in die strategische Form übersetzen, in welcher man dann die Nash-Gleichgewichte bestimmen kann.

4.1. Formalisierung von extensiven Spielen

Definition 1 (extensive Spiele mit perfekter Information):
Ein **extensives Spiel mit perfekter Information (mpI)** (Anm: alle Spieler haben zu allen Zeitpunkten alle Informationen, die sie benötigen, um ihre Entscheidung zu treffen) hat folgende Komponenten:

- Eine endliche nicht leere Menge N (Spieler)
- Eine Menge H (**Historien**) von Sequenzen mit folgenden Eigenschaften:
  - die leere Sequenz $\langle\rangle$ gehört zu H
  - Falls $\langle a^1, \dots, a^k\rangle \in H$ (wobei $k = \infty$ sein kann) und $l < k$, dann $\langle a^1, \dots a^l\rangle \in H$
  - Falls für eine unendliche Sequenz $\langle a^i\rangle_{i=1}^{\infty}$ gilt, dass $\langle a^i\rangle_{i=1}^{k} \in H$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann gilt $\langle a^i\rangle_{i=1}^{\infty} \in H$.

  Alle unendliche Sequenzen und alle Sequenzen $\langle a^i\rangle_{i=1}^{k} \in H$ mit $\langle a^i\rangle_{i=1}^{k+1} \notin H$ für beliebiges heißen terminale Historien. Die Menge der terminalen Historien heißt Z. Elemente einer Historie heißen **Aktionen**
- Funktion $P : H \setminus Z \to N$ (Spielerfunktionen)

  (Anm: bestimmt, wer nach einer Historie als nächster am Zug ist)
- Funktionen: $u_i : Z \to \mathbb{R}$ (Auszahlungsfunktionen)

Wenn H endlich ist, dann ist das Spiel endlich.
Falls die länge der Historien beschränkt ist, dann hat das Spiel einen **endlichen Horizont**.
Notation: Sei $h = \langle a^1, \dots a^k\rangle$ und Aktion a dann ist $(h, a) = \langle a^1, \dots, a^k, a\rangle$.
Falls $h' = \langle b^1, \dots, b^l\rangle$, dann ist $(h, h') = \langle a^1, \dots, a^k, b^1, \dots, b^l\rangle$.
Intuition: Nach jeder Historie $h \in H$ kann der Spieler $P(h)$ eine Aktion aus:

$$A(h) = \{a \mid (h, a) \in H\}$$

wählen.

Beispiel:

Verteilung zweier Dinge. Spieler 1 schlägt vor, Spieler 2 akzeptiert den Vorschlag oder lehnt ihn ab. Wenn Spieler 2 akzeptiert, werden die Dinge so aufgeteilt, wie von Spieler 1 vorgeschlagen, ansonsten erält keiner etwas. Darstellung als Spielbaum:

1

(2,0) (1,1) (0,2)

(2j0) (0n0) (1j1) (0n0) (0j2) (0n0)

In der Schreibweise der der Definition: $N = \{1, 2\}$
$H = \{\langle\rangle, \langle(2,0)\rangle, \langle(1,1)\rangle, \langle(0,2)\rangle, \langle(2,0), y\rangle, \langle(2,0), n\rangle, \ldots\}$
$P(\langle\rangle) = 1$
$P(h) = 2$ für $h \neq \langle\rangle$
$u_1(\langle(2,0), j\rangle) = 2$
$u_2(\langle(2,0), j\rangle) = 0$
...

4.2. Strategien

Definition 1:
Eine **Strategie** eines Spielers i in einem extensiven Spiel mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ist eine Funktion s_i, die jeder Historie $h \in H$ mit $P(h) = i$ eine Aktion aus $A(h) = \{a \mid (h, a) \in H\}$ zuweist.

Notation (für endliche Spiele): Strategie wird notiert, als Sequenz von Aktionen an Entscheidungspunkten, die in „Breitensuch“-Reihenfolge besucht werden.
Beispiel:

Strategien für Spieler 1: AE,AF,BE,BF Strategien für Spieler 2: C,D

Definition 2 (Ausgang oder Ergebnis):
Der **Ausgang**oder das **Ergebnis**$O(s)$ für ein Strategieprofil $s = (s_i)_{i\in N}$ ist die, möglicherweise unendliche, Historie, $h = \langle a^1, \ldots, a^k\rangle$, für die gilt, dass für alle l mit

$$0 \leq l < k : \; s_{P(\langle a^1,\ldots,a^l\rangle)}(\langle a^1, \ldots a^l\rangle) = a^{l+1}$$

4.3. Nash-Gleichgewichte

Definition 1:
Ein Nash-Gleichgewicht für ein extensives Spiel mit perfekter Information $\langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ist ein Strategieprofil s^*, so dass für jeden Spieler $i \in N$ gilt:

$$u_i(O(s^*_{-i}, s^*_i)) \geq u_i(O(s^*_{-i}, s_i))$$

für alle Strategien s_i.
Äquivalent kann man die strategische Form von extensiven Spielen definieren.

Beispiel:

s.o. $B \to (1,2)$, $A, L \to (0,0)$, $A, R \to (2,1)$ strategische Form

	L	R
A	0 0	1 2
B	2 1	2 1

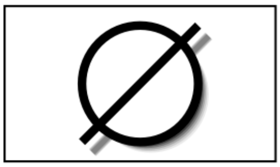
Nash-Gleichgewichte (B,L), (A,R) Das Nash-Gleichgewicht (B, L) ist unrealistisch: Spieler 1 spielt hier B, weil dies optimal ist, unter der Bedingung, dass Spieler 2 L spielt. Tatsächlich würde Spieler 2 jedoch in der Situation, in der er zwischen L und R entscheiden muss, niemals L spielen, da er sich dadurch selbst schlechter stellt. Man bezeichnet L daher als „leere oder „unplausible Drohung“ Ebenso beim Aufteilungsspiel: Nash-Gleichgewichte: $((2,0), jjj)$, $((2,0), jjn)$, $((2,0), jnj)$, $((2,0), jnn)$ $((1,1), nnj)$, $((1,1), njn)$, $((0,2), nnj)$, $((0,2), nnj)$, $((2,0), nnn)$. Bis auf $((2,0), jjj)$ und $((1,1), njj)$ enthalten alle Nash-Gleichgewichte „leere Drohungen“

4.4. Teilspiel-perfekte Gleichgewichte

Idee: Man fordert, dass Gleichgewichtsstrategien in jedem Teilspiel optimal sind.

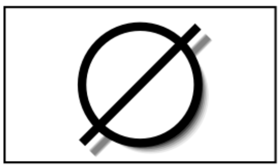
Definition 1:
Ein Teilspiel eines extensiven Spiels mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$, das nach der Historie h beginnt, ist das Spiel $\Gamma(h) = \langle N, H|_h, P|_h, (u_i|_h) \rangle$, wobei $H|_h = \{h' \mid (h, h') \in H\}$,
11.06.2004 $P|_h(h') = P(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$ und $u_i|_h(h') = u_i(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$.

Bemerkung 1 (Notation für Strategien):
Lauf durch den Baum, Ebene für Ebene, notiere Entscheidungen



Mögliche Strategien für Spieler 1: AGI, AGJ, AHI, AHJ, BDI, ...
(Anm: Man notiert auf jeden Fall für jeden einzelnen Knoten die Entscheidung, also auch für Kombinationen, die nie entstehen können. Man betrachtet diese Teilstrategien trotzdem mit, da der andere Spieler die Strategie auch ändern könnte. Man könnte die Strategie als Programm auffassen, das definiert, was an jedem Punkt zu machen ist.)

Erinnerung: Teilspiel $\Gamma(h) = \langle N, H|_h, P|_h, (u_i|_h) \rangle$



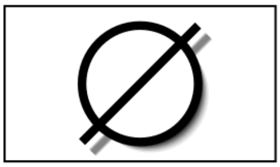
Für eine Strategie s_i und Historie h des Spiels Γ , sei $s_i|_h$ die durch s_i induzierte Strategie für $\Gamma(h)$.
(Anm: In obigem Beispiel wäre die durch $\Gamma(A)$ und AGI induzierte Teilstrategie G (I spielt keine Rolle mehr).)
D.h $s_i|_h(h') = s_i(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$. O_h ist die Ergebnisfunktion für $\Gamma(h)$.

Definition 2:
Ein teilspielperfektes Gleichgewicht (TPG) (engl.: subgame perfect equilibrium, SPE) ist ein Strategieprofil s^*, so dass für jeden Spieler i und für jede nicht-terminale Historie $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = i$ gilt:

$$u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h)) \geq u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s_i))$$

für jede Strategie s_i des Spielers i im Teilspiel $\Gamma(h)$.

Beispiel:



Zwei Nash-Gleichgewichte: (A, R), (B, L) Betrachte (A, R): In Historie $h = A$ ist Teilspielperfekt, da Spieler 2 dann R wählt. In Historie $h = \varnothing$ erhält Spieler 1 den Nutzen 1 bei Wahl von B und den Nutzen 2 bei Wahl von A also ist (A, R) TPG. Betrachte (B, L): Nicht teilspiel-perfekt, da L in der Historie $h = \langle A \rangle$ nicht den Nutzen maximiert.
Bei Verteilungsspiel:

Teilspiele für Spieler 2:
Nach $(2, 0)$: j und n sind beide TPGs
Nach $(1, 1)$: j ist ein TPG
Nach $(0, 2)$: j ist ein TPG
Damit folgt
$((2, 0), jjj)$ ist ein TPG
$((2, 0), njj)$ ist kein TPG
$((1, 1), jjj)$ ist kein TPG
$((1, 1), njj)$ ist kein TPG

15.06.2004

Lemma 1 (1-Schritt-Abweichung 1SA, engl. „one deviation property“, ODP):
Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ein extensives Spiel mit perfekter Information mit endlichem Horizont. Das Strategieprofil s^* ist ein TPG von Γ gdw für jeden Spieler $i \in N$ und jede Historie $h \in H$ mit $P(h) = i$ gilt:

$$u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h)) \geq u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s_i))$$

für jede Strategie s_i des Spielers i im Teilspiel $\Gamma(h)$, *die sich von $s^*_i|_h$ nur in der Aktion unterscheidet, die direkt nach der initialen Historie von $\Gamma(h)$ vorgeschrieben wird.*

Beweis:

Falls s^* ein TPG ist, gilt die Eigenschaft natürlich. Sei s^* also ein Strategieprofil, das kein TPG ist. Zu zeigen ist, dass die Eigenschaft dann verletzt ist.
Für beliebige nicht-terminale Historien h bezeichnen wir mit $D(h, i)$ die Menge derjenigen Strategien für Spieler $i \in N$, durch die er sich im Teilspiel $G(h)$ gegenüber s^*_i verbessen könnte, d.h. die Menge der Strategien s_i für $G(h)$, für die gilt:

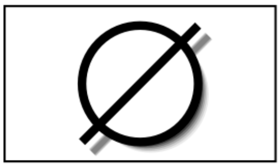
$$u_{i|h}(O_h(s^*_{-i|h}, s_i)) > u_{i|h}(O_h(s^*{}_{|h})).$$

Da s^* kein TPG ist, gibt es ein Paar (h, i), für das $D(h, i) \neq \varnothing$ gilt. Wir wählen speziell h und i so, dass die Historie h maximale Länge hat. Dies ist möglich, da das Spiel einen endlichen Horizont hat. Wähle nun $s_i \in D(h, i)$ beliebig.
Für alle echten Teilspiele $G(h, h')$ von $G(h)$ muss gelten, dass $s^*_{i\,|(h,h')}$ mindestens denselben Nutzen für Spieler i erreicht wie $s_{i|h'}$, denn sonst hätte man anstelle von h die längere Historie (h, h') wählen können. Da sich ein Spieler in $G(h)$ nicht verschlechtern kann, indem er seinen Nutzen in einem Teilspiel verbessert, können wir somit $s_i(h') = s^*_i(h, h')$ für alle $h' \in H_{|h} \setminus \{\langle\rangle\}$ setzen und die modifizierte Strategie liegt immer noch in $D(h, i)$. Damit ist die modifizierte Strategie eine profitable Abweichung von $s^*_{i\,|h}$, die sich von dieser nur auf der leeren Historie unterscheidet.

□

Beweis:

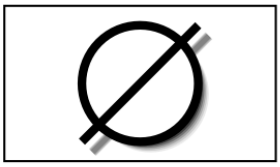
Falls s^* ein TPG ist, gilt die Eigenschaft natürlich.
Umgekehrt: Annahme s^* ist kein TPG.
Zu zeigen: es existiert eine Historie h, die die obige Bedingung verletzt. Da s^* kein TPG ist, gibt es eine Historie h, so dass eine profitable Abweichung s_i in $\Gamma(h)$ existiert. Die Anzahl der Historien h', so dass $s_i(h') \neq s^*_i|_h(h')$ kann durch die Länge von $\Gamma(h)$ beschränkt werden.



Wähle profitable Abweichung in $\Gamma(h)$, so dass die Anzahl der Historien h' mit $s_i^*(h') \neq s_i(h')$. Sei h^* die längste Historie von Historien h' in $\Gamma(h)$ so dass $s_i(h') \neq s_i^*|_h(h')$ ist. Dann ist die initiale Historie in $\Gamma(h, h^*)$ die einzige, an der $s_{i|h^*}$ sich von $s_i^*|_{(h,h^*)}$ unterscheidet. Ausserdem muss die Abweichung profitabel sein, da wir s_i mit minimal vielen Abweichungen gewählt haben.

$\square$

Gegenbeispiel für Spiele ohne endlichen Horizont. Ein-Spieler-Spiel



$$s_i(h) = D \qquad \forall h \in H$$

Satz 1 (Theorem von Kuhn):
Jedes endliche extensive Spiel mit perfekter Information hat ein Teilspiel-perfektes Gleichgewicht.

Beweis:

Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ein endliches extensives Spiel mpI. Konstruktion eines TPGs durch Induktion über die Länge der Teilspiel $\ell(h)$. Ausserdem parallele Konstruktion von Funktion $R : h \mapsto h'$ $h \in H$, $(h, h') \in Z$, wobei h' eine Historie für $\Gamma(h)$ ist.
Falls $\ell(\Gamma(h)) = 0$, dann ist $R(h) = \langle\rangle$. Sei $R(h)$ definiert für alle $h \in H$ mit $\ell(\Gamma(h)) \leq k$. Betrachte nun $h^* \in H$ $\ell(\Gamma(h^*)) = k + 1$ und $P(h^*) = i$. Es muss gelten $\ell(\Gamma(h^*, a)) \leq k$ für alle $a \in A(h^*)$ Definiere $s_i(h^*)$ als u_i-Maximierer für $(h^*, a, R(h^*, a))$ über $a \in A(h^*)$ und setze $R(h^*) = (s_i(h^*), R(h^*, s_i(h^*)))$. Per Induktion erhalten wir dabei ein Strategieprofil, das die 1SA-Eigenschaft erfüllt. D.h. mit dem vorigen Lemma folgt, dass das Strategieprofil ein TPG ist.

$\square$

Gegenbeispiel wenn Endlichkeit nicht gegeben:

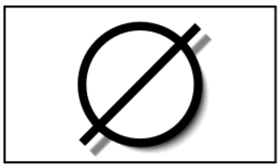
1. Endlicher Horizont, aber unendliche Verzweigung:

   (Anm: Auszahlung unendlich viele Aktionen mit Auszahlung im Intervall $[0, 1[$, wobei jede Aktion eine andere Auzahlung besitzt)

2. Unendlicher Horizont, aber endlich viele Verzweigungen:

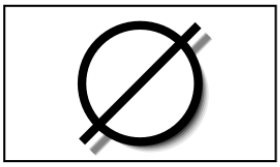
   (Anm: u_i = Anzahl der gemachten Schritte)

Kuhns Satz sagt nichts über die Eindeutigkeit aus.

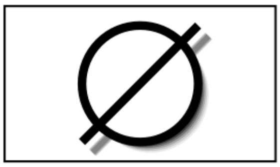


18.06.2004 Falls keine zwei Historien von einem Spieler gleich bewertet werden, dann ist das TPG eindeutig.
Beispiel (Ladenkettenspiel):

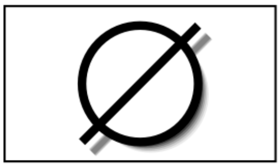
Spieler CS hat in verschiedenen Städten Läden. In jeder Stadt gibt es einen Spieler i, der im Schritt $2i - 1$ nichts macht (N) oder einen Laden eröffnet (L). Spieler CS reagiert durch Kooperation (K) oder durch Angriff (A).



Das Spiel findet für jeden Spieler i statt. Kombination ist Addition für CS. Für $n = 2$



$\rightsquigarrow$ Laden öffnen, kooperieren $\rightsquigarrow$ Unrealistisch mit wiederholten Spielen.
Beispiel (Tausendfüßler Spiel):

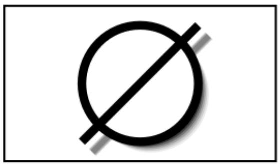


4.5. Zwei Erweiterungen

Exogene Unsicherheit: Die Natur kann Züge machen $\langle N, H, P, f_c, (U_i)\rangle$, wobei:

- N und H wie vorhin
- $P: \; H \to N \cup \{c\}$ „c“: chance node
- für jede $h \in H$: Falls $P(h) = c$, dann ist $f_c(\cdot|h)$ ein Wahrscheinlichkeitsverteilung über $A(h)$, wobei alle $f_c(\cdot|h)$ s unabhängig voneinander sind.
- U_i wird dann der erwartete Nutzen.

Beispiel:



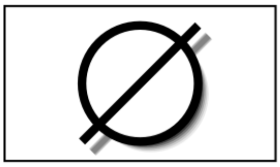
$f_c(a_1|h) = 0.1$ $f_c(a_2|h) = 0.2$ $f_c(a_3|h) = 0.7$ Strategie wie vorher.
Bemerkung 1:
Satz von Kuhn gilt weiterhin, genauso wie die 1SA-Eigenschaft.

Weitere Variation: gleichzeitig Züge Ein extensives Spiel mit perfekter Informaion und mit simultanen Zügen ist ein Tupel $\langle N, H, P, (u_i)\rangle$, wobei N, H, (u_i) wie vorher sind und $P : H \to Z^N$ mit i für alle

$$h \in H \setminus Z: \; A(h) = \{a \mid (h, a) \in H\} \bigtimes_{i \in P(h)} A_i(h)$$

Historie: Sequenz von Vektoren von Aktionen TPG-Def: $P(h) = i$ muss ersetzt werden durch $i \in P(h)$
Bemerkung 2:
Satz von Kuhn gilt nicht mehr, Bsp: Matching Pennies

Beispiel:



22.06.2004 Beide wählen ein nicht negative Zahl Auszahlung: Produkt der Zählen.

Kapitel 5

Spieltheorie in Multiagentensystemen

Grundlage ist das Buch „Rules of Encounter“ von Jeffrey S. Rosenschein und Gilad Zlotkin.
Motivation: Wie können *unabhängig entwickelte, eigennützige* Agenten kooperieren?
→ Verhandlungen über mögliche Zusammenarbeit.
Beispiel:

Kinder zur Schule zu bringen, wobei auch Nachbarkinder mitgenommen werden können. Wer fährt wann welche Kinder? Wie handelt man aus, wer fährt?
Verhandlungsmechanismen können beschrieben werden durch:

- potentielle Verhandlungsergebnisse
- Verhandlungsprotokoll
- Strategie: Wie soll der Agent handeln.
  (Anm: Es kann von Vorteil sein, seine Strategie öffentlich zu machen. Dadurch kann man z.B. erreichen, dass ein bestimmtes Gleichgewicht erreicht wird.)

Eigenschaften von Verhandlungsmechanismen:

1. Effizienz: Das Verhandlungsergebnis sollte Pareto-optimal oder global optimal sein.
   (Anm: Ein Ergebnis ist Pareto-optimal, wenn es kein Ergebnis gibt, für das ein Spieler mehr bekommen kann und alle anderen nicht weniger erhalten.)
2. Stabilität: Es sollte keine Belohnung für Abweichung von der publizierten Strategie geben.
3. Einfachheit: Möglichst wenig Berechnung und Kommunikation sollte nötig sein.
   (Anm: Dadurch kann die Stabilität erhöht werden, da man ansonsten evtl. einen Weg findet, den anderen herein zu legen.)
4. Verteiltheit: keine zentrale Steuerungsinstanz aber evtl. Kontrollinstanz
5. Symmetrie: Agenten sollen alle gleich behandelt werden … sofern es um irrelevante Unterschiede geht.
   (Anm: z.B. Abstammung, Religion, ...)

Unterschiedliche Domänentypen:

TOD: **Task-orientierte Domäne** (Anm: Aufgaben-orientierte)
Es existiert eine Menge von zugewiesenen Aufgaben, die neu verteilt werden können.
Es gibt keine Konflikte zwischen den Aufgaben.
→Alle können nur gewinnen.
Entspricht monotonen Planungsproblemen mit mehreren Agenten.
ZOD: **Zustands-orientierte Domäne**

Jeder Agent möchte Zielzustände erreichen.
Es kann Konflikte geben.
→ Agenten müssen Konflikte auflösen.
Entspricht normaler Handlungsplanung.

WOD:**Werte-orientierte Domäne**
Zustände haben Bewertungen.
Agenten können zu Kompromissen kommen.
Entspricht entscheidungstheoretischem Planen.

wichtige (vereinfachende) Annahmen

1. Agenten sind Maximierer des erwarteten Nutzens.
2. Isolierte Verhandlungen: keine Rückwirkung auf zukünftige Verhandlungen.
3. Vergleichbare Nutzen: Es gibt eine gemeinsame „Währung“.
4. Symmetrische Fähigkeiten: Alle Agenten können das gleiche.
5. Öffentlich abgegebene Verpflichtungen werden eingehalten.
6. Kein *expliziter* Transfer von Nutzen.

5.1. TOD Formalisierung

Definition 1 (Task-orientierte Domäne (TOD)):
Eine **Task-orientierte Domäne (TOD)** ist ein Tupel $\langle T, N, c\rangle$, wobei

- T die Menge aller möglichen Aufgaben ist,
- N die (endliche, nicht-leere) Menge aller Agenten ist und
- c die Kostenfunktion ist mit $c : [2^X] \mapsto \mathbb{R}^X$.

  (Anm: $[2^X]$: **endliche** Teilmengen von X)

  c ist monoton, d.h. $X \subseteq Y \Rightarrow c(X) \leq c(Y)$, und $c(\varnothing) = 0$

Definition 2 (Begegnung):
Eine **Begegnung** in einer TOD $\langle T, N, c\rangle$ ist ein Profil von endlichen Teilmengen von T. (T_i sind die von Agent i zu erledigenden Aufgaben.)

Beispiel:

1. Logistik-Domäne: Agenten müssen Container zu Lagerhäusern transportieren, deren Lage durch einen gewichteten Graphen $G = (V, E)$ beschrieben ist. Alle Agenten starten an einem zentralen Depot. Sie können dort Container ohne Kosten tauschen. Die Task-Menge ist die Menge der Knoten V. **Kostenfunktion**: Für $X \subseteq V$ ist $c(X)$ die Länge eines minimal langen Pfades vom Depot, der alle Knoten aus X enthält.

2. Postboten-Domäne: identisch mit Logistik-Domäne, außer, dass die Agenten am Ende zurückfahren müssen.

3. Datenbank-(Anfrage-)Domäne: Agenten greifen mit SQL-Anfragen auf eine Datenbank zu. Agenten können Resultate von Anfragen und Teilanfragen ohne Kosten austauschen. *Taskmenge* ist die Menge aller SQL-Anfragen. *Kostenfunktion* ist die Anzahl aller elementaren Datenbank-Operationen, die ausgeführt werden müssen.

5.1.1 Verhandlungsmechanismen für TODs

Vereinbarungen und Verhandlungsmenge (Deals and Negotiation Set)

Im weiteren: $N = \{1, 2\}$ (Anm: damit Absprachen vermieden werden)

Definition 3:
Gegeben eine Begegnung (T_1, T_2) in der TOD $\langle T, \{1, 2\}, c\rangle$, dann ist ein Profil (D_1, D_2) von Taskmengen eine **reine Vereinbarung**, falls $D_1 \cup D_2 = T_1 \cup T_2$. Die Kosten der Vereinbarung für Spieler k sind $C_k(D_1, D_2) = c(D_k)$, für $k = 1, 2$.

Beispiel:

Logistik-Domäne

$T_1 = \{a, b\}$
$T_2 = \{a\}$
Mögliche Verteilungen mit $D_1 \cup D_2 = \{a, b\}$.
$(\varnothing, \{a, b\}), (\{a\}, \{b\}), (\{a, b\}, \varnothing), (\{a, b\}, \{a, b\}), \ldots \to 9$ mögliche Vereinbarungen

Definition 4:
Gegeben eine Begegnung (T_1, T_2) in TOD $\langle T, \{1, 2\}, c\rangle$, dann haben wir:

1. Der Nutzen der reinen Vereinbarung δ für Spieler k ist $U_k(\delta) = c(T_k) - C_k(\delta)$
2. Die reine Vereinbarung $K = (T_1, T_2)$ heißt Konfliktvereinbarung. (Sie hat den Nutzen 0, da $U(k) = c(T_k) - C_k(k) = c(T_k) - c(T_k) = 0$.)

Beispiel:

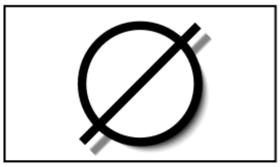
$U_1(\{b\}, \{a\}) = c(\{a, b\}) - C_1(\{b\}, \{a\}) = 3 - 1 = 2$ 25.06.2004

Definition 5 (Dominanz und Äquivalenz von Vereinbarungen):
Für reine Vereinbarungen δ und δ' sagen wir:

- δ dominiert δ' ($\delta \succ \delta'$), falls
$$U_k(\delta) \geq U_k(\delta')$$
für alle $k \in N$ und für ein $i \in N$:
$$U_i(\delta) > U_i(\delta')$$
- δ dominiert δ' ($\delta \succeq \delta'$) schwach, falls
$$U_k(\delta) \geq U_k(\delta') \qquad \text{für alle } k \in N$$
- δ ist äquivalent zu δ' ($\delta \approx \delta'$) falls $\delta \succeq \delta'$ und $\delta \preceq \delta'$

Beispiel:

Begegnung $(\{a,b\},\ \{a\})$



$$(\underset{0}{\{a,b\}},\underset{1}{\varnothing}) \succ (\underset{0}{\{a,b\}},\underset{0}{\{a\}}) \succ (\underset{0}{\{a,b\}},\underset{-2}{\{a,b\}})$$
$$(\underset{2}{\{a\}},\underset{0}{\{b\}}) \approx (\underset{2}{\{b\}},\underset{0}{\{a\}})$$

Definition 6:
Eine Vereinbarung δ heißt individuell rational, falls $\delta \succeq K$.
(Anm: Ein Agent würde keine Vereinbarung akzeptieren, die nicht individuell rational ist.)

Definition 7 (Pareto-optimale Vereinbarung):
Eine Vereinbarung δ heißt Pareto-optimal, falls es keine Vereinbarung δ' gibt, für die $\delta' \succ \delta$ gilt.

Definition 8 (Verhandlungsmenge):
Die Menge aller Vereinbarungen, die individuell rational und Pareto-optimal sind, heißt Verhandlungsmenge (VM)

Beispiel:

Vorheriges Beispiel mit Begegnung $(\{a,b\},\{a\})$. Die Verhandlungsmenge dafür ist $\{(\{a,b\},\varnothing),(\{a\},\{b\}),(\{b\},\{a\})$

Satz 1:
Für jede Begegnung in einer TOD ist die Verhandlungsmenge nicht leer.

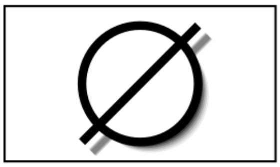
5.1.2 Verhandlungsprotokoll

Ein mögliches Verhandlungsprotokoll:

1. In jeder Runde machen beide Agenten Angebote (aus der Verhandlungsmenge).
2. Resultiert ein Angebot für einen der Agenten in nicht weniger Nutzen als dieser fordert, ist das Angebot akzeptiert. δ_i, δ_k Angebote von i bzw. k $(i \neq k)$:
   $$U_k(\delta_k) \leq U_k(\delta_i) \Rightarrow \delta_i \text{ ist akzeptiert}$$
   Falls beide Angebote akzeptiert werden, wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit zwischen beiden ausgewählt.
3. Falls keine Akzeptanz, dann gibt es eine weitere Runde, in der nur Angebote gemacht werden dürfen, die den anderen Agenten nicht schlechter stellen als das vorige Angebot.
4. Falls beide Agenten in einer Runde keine Zugeständnisse machen, wird die Verhandlung mit der Konfliktvereinbarung beendet.

Beispiel:

Logistik-Domäne



Begegnung: $(\{a,b,c,d\},\{a,b,c,d\})$

A:	$(\{a,b,c,d\},\varnothing)$	0	10
B:	$(\{a,b,c\},\{d\})$	1	3
C:	$(\{a,b\},\{c,d\})$	2	2
D:	$(\{a\},\{b,c,d\})$	3	1
E:	$(\varnothing,\{a,b,c,d\})$	10	0

Mögliche Verhandlung

	Agent1	Agent2
1	E	A
2	E	B
3	E	C
4	D	D

29.06.2004

Definition 9 (Monotones Zugeständnisprotokoll):
Sei (T_1, T_2) eine Begegnung in der TOD $\langle T, \{1,2\}, c\rangle$ mit Verhandlungsmenge VM. Das **monotone Zugeständnisprotokoll über reine Vereinbarungen** ist das extensive Spiel mit simultanen Zügen $\langle \{1,2\}, H, P, (u_i)_{i\in\{1,2\}}\rangle$, das wie folgt definiert ist:

1. H enthält alle endlichen Folgen von Vereinbarungspaaren $(\delta_1^n, \delta_2^n)_{n=1,\ldots,t}$, für die gilt:
   - $\delta_i^n \in VM$ für alle $i \in \{1,2\}$, $n \in \{1,\ldots,t\}$
   - $U_i(\delta_j^n) \geq U_i(\delta_j^m)$ für alle $i \neq j \in \{1,2\}$, $m < n \in \{1,\ldots,t\}$
   - $U_i(\delta_j^n) > U_i(\delta_j^n)$ für mindestens ein $i \neq j$ und alle $m < n \in \{1,\ldots,t-1\}$
   - $U_i(\delta_j^n) < U_i(\delta_i^n)$ für alle $i \neq j \in \{1,2\}$ und alle $n \in \{1,\ldots,t-1\}$
2. Für alle nicht-terminalen Historien $h \in H\backslash Z$ gilt: $P(h) = \{1,2\}$
3. Für alle terminalen Historien $h = (\ldots, (\delta_1^*, \delta_2^*)) \in Z$ definiere die **Akzeptanzmengen**

$$N_h^A = \{i \in \{1,2\} \mid U_i(\delta_j^*) \geq U_i(\delta_i^*) \text{ für } i \neq j\}$$

und es gilt

$$u_i(h) = \begin{cases} 0 & \text{falls } N_h^A = \varnothing \\ U_i(\delta_2^*) & \text{falls } N_h^A = \{1\} \\ U_i(\delta_1^*) & \text{falls } N_h^A = \{2\} \\ \frac{1}{2}(U_i(\delta_1^*) + U_i(\delta_2^*)) & N_h^A = \{1,2\} \end{cases}$$

Bemerkung 1:
Das monotone Zugeständnisprotokoll über reinen Vereinbarungen ist endlich.

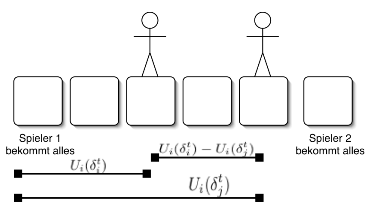
5.1.3 Verhandlungsstrategien

Wie sollten sich die Agenten bei der Verhandlung verhalten?
$\rightsquigarrow$ Sie sollten eine TPG-Strategie verfolgen. Aber welche?
Beispiel (Snickers-Spiel):

Nutzenprofile der VM=$\{(5,0), (4,1), (3,2), (2,3), (4,1), (0,5)\}$
Strategie für 1: Biete am Anfang $(5,0)$, komme Spieler 2 nie entgegen. Strategie für 2: Biete am Anfang $(0,5)$, komme Spieler 1 immer um 1 entgegen.
$\rightsquigarrow$ TPG, aber keine zufriedenstellende Lösung.
Idee: Der Spieler, der bei Konflikt mehr zu verlieren hat, macht Zugeständnis. Betrachte nicht-terminale Historie $(\delta_1^n, \delta_2^n)_{n=1,\ldots,t}$ Definiere für Spieler i den Ausdruck

$$Risiko_i^t = \frac{U_i(\delta_i^t) - U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)}$$

(Anm: je höher das „Risiko“ ist, desto eher gehen wir ein Risiko ein)
$(U_i(\delta_i^t) \neq 0)$



Zeuthen-Strategie (für Spieler i):

1. Zu Beginn, biete eine Vereinbarung aus VM, die U_i maximiert.

2. Nach der Historie $(\delta_1^n, \delta_2^n)_{n=1,\dots,t}$

    - biete wieder δ_i^t, falls $Risiko_i^t > Risiko_j^t$ $(i \neq j)$

    - Ansonsten betrachte alle $\delta \in VM$ mit

$$U_j(\delta_i^t) > U_j(\delta) \geq U_j(\delta_j^t)$$

und

$$\underbrace{\frac{U_i(\delta) - U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta)}}_{\text{„}Risiko_i^{t+1}\text{“}} \geq \underbrace{\frac{U_j(\delta_j^t) - U_j(\delta)}{U_j(\delta_j^t)}}_{\text{„}Risiko_j^{t+1}\text{“}}$$

Biete eine solche Vereinbarung δ, die $U_i(\delta)$ maximiert.

Beispiel (von vorher):

- Zeuthen vs. Zeuthen:

Runde	Spieler 1 δ_1^t	Spieler 2 δ_2^t	$Risiko_1^t$	$Risiko_2^t$
1.	(5,0)	(0,5)	1	1
2.	(4,1)	(1,4)	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
3.	(3,2)	(2,3)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
4.	(2,3)	(3,2)		

- Zeuthen vs Hart:

Runde	Spieler 1 δ_1^t	Spieler2 δ_2^t	$Risiko_1^t$	$Risiko_2^t$
1.	(5,0)	(0,5)	1	1
2.	(4,1)	(5,0)	1	$\frac{4}{5}$
3.	(4,1)	(5,0)		

Eigenschaften von Zeuthen-Strategien Erinnerung: wünschenswerte Eigenschaften für Verteilungsmechanismen

- Effizienz ✓
- Stabilität ?
- Einfachheit ✓
- Verteiltheit ✓
- Symmetrie ✓

02.07.2004

Satz 2 (Harsanyi):
Wenn beide Agenten die Zeuthen-Strategie verfolgen, dann einigen sie sich auf eine Vereinbarung, die das Produkt des Nutzens der beiden Spieler maximiert.
Anmerkung: So eine Vereinbarung heißt Nash-Lösung.

Beweis:

Lemma 1 ($\pi(\delta)$):
Spieler i macht nach t Schritten ein Zugeständnis gdw. $\pi(\delta_i^t) \leq \pi(\delta_j^t)$, wobei $\pi(\delta) := U_1(\delta)U_2(\delta)$

Beweis:

$$Risiko_i^t = \frac{U_i(\delta_i^t) - U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} = 1 - \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow Risiko_i^t \le Risiko_j^t \quad & \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} \le 1 - \frac{U_j(\delta_i^t)}{U_j(\delta_j^t)} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} \ge \frac{U_j(\delta_i^t)}{U_j(\delta_j^t)} \\
& \Leftrightarrow \quad U_i(\delta_j^t) \cdot U_j(\delta_j^t) \ge U_j(\delta_j^t) \cdot U_i(\delta_j^t) \\
& \Leftrightarrow \quad \pi(\delta_j^t) \ge \pi(\delta_i^t)
\end{aligned}$$

□

Lemma 2:
Macht Spieler i nach t Schritten ein Zugeständnis, so gilt $\pi(\delta_i^{t+1}) \ge \pi(\delta_j^t)$

Beweis:

analog zum vorherigen Lemma

□

Folgerung: Die Abbildung $n \mapsto \max\{\pi(\delta_1^n), \pi(\delta_2^n)\}$ wächst monoton.
Für die finalen Angebote gilt, $\pi(\delta_1^t) = \pi(\delta_2^t)$ Annahme: Die Spieler einigen sich auf $\delta^* \in VM$, aber es gibt ein $\delta' \in VM$ mit $\pi(\delta') > \pi(\delta^*)$

$$\pi(\delta') \ne \pi(\delta^*) \Rightarrow U(\delta') \ne U(\delta^*) \overset{\delta' \text{ Pareto-opt}}{\Rightarrow} \exists i \in N: \; U_i(\delta') > U_i(\delta^*)$$

Dann hätte Spieler i in dem Schritt, in dem er zum ersten Mal eine Vereinbarung δ mit $U_i(\delta) \le U_i(\delta')$ vorgeschlagen hat, statt dessen auch δ' vorschlagen können. δ' wäre eine gültige Wahl gewesen, da $\pi(\delta') > \pi(\delta^*) \overset{\text{Monotonie}}{\ge} \pi(\delta)$ und i wäre j damit weniger weit entgegen gekommen $\Rightarrow$ Spieler i hätte nicht δ vorgeschlagen.
Widerspruch.
$\Rightarrow$ Die Vereinbarung δ^*, auf die sich die Spieler einigen, maximiert π.

□

Satz 3:
Die Zeuthen-Strategie ist nicht stabil

|(0,5)|(1,4)|(2,3)|(3,2)|(4,1)|(5,0)| Jeder geht nach Zeuthen jeweils einen Schritt. Durch Abweichen in dem letzen Schritt erhält man sicher mehr, da der Gegner einem entgegenkommt

Index