02.07.2004

Satz 2 (Harsanyi):
Wenn beide Agenten die Zeuthen-Strategie verfolgen, dann einigen sie sich auf eine Vereinbarung, die das Produkt des Nutzens der beiden Spieler maximiert.

Anmerkung: So eine Vereinbarung heißt Nash-Lösung.

Beweis:

Lemma 1 ($\pi(\delta)$):
Spieler i macht nach t Schritten ein Zugeständnis gdw. $\pi(\delta_i^t) \leq \pi(\delta_j^t)$, wobei $\pi(\delta) := U_1(\delta)U_2(\delta)$

Beweis:

$$Risiko_i^t = \frac{U_i(\delta_i^t) - U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} = 1 - \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow Risiko_i^t \leq Risiko_j^t \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} \leq 1 - \frac{U_j(\delta_i^t)}{U_j(\delta_j^t)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} \geq \frac{U_j(\delta_i^t)}{U_j(\delta_j^t)} \\
&\Leftrightarrow \quad U_i(\delta_j^t) \cdot U_j(\delta_j^t) \geq U_j(\delta_j^t) \cdot U_i(\delta_j^t) \\
&\Leftrightarrow \quad \pi(\delta_j^t) \geq \pi(\delta_i^t)
\end{aligned}$$

□

Lemma 2:
Macht Spieler i nach t Schritten ein Zugeständnis, so gilt $\pi(\delta_i^{t+1}) \geq \pi(\delta_j^t)$

Beweis:

analog zum vorherigen Lemma

□

Folgerung: Die Abbildung $n \mapsto \max\{\pi(\delta_1^n), \pi(\delta_2^n)\}$ wächst monoton.

Für die finalen Angebote gilt, $\pi(\delta_1^t) = \pi(\delta_2^t)$
Annahme: Die Spieler einigen sich auf $\delta^* \in VM$, aber es gibt ein $\delta' \in VM$ mit $\pi(\delta') > \pi(\delta^*)$

$$\pi(\delta') \neq \pi(\delta^*) \Rightarrow U(\delta') \neq U(\delta^*) \stackrel{\delta' \text{ Pareto-opt}}{\Rightarrow} \exists i \in N: \; U_i(\delta') > U_i(\delta^*)$$

Dann hätte Spieler i in dem Schritt, in dem er zum ersten Mal eine Vereinbarung δ mit $U_i(\delta) \leq U_i(\delta')$ vorgeschlagen hat, statt dessen auch δ' vorschlagen können.

δ' wäre eine gültige Wahl gewesen, da $\pi(\delta') > \pi(\delta^*) \stackrel{\text{Monotonie}}{\geq} \pi(\delta)$ und i wäre j damit weniger weit entgegen gekommen $\Rightarrow$ Spieler i hätte nicht δ vorgeschlagen.

Widerspruch.

$\Rightarrow$ Die Vereinbarung δ^*, auf die sich die Spieler einigen, maximiert π.

□

Satz 3:
Die Zeuthen-Strategie ist nicht stabil

|(0,5)|(1,4)|(2,3)|(3,2)|(4,1)|(5,0)| Jeder geht nach Zeuthen jeweils einen Schritt.
Durch Abweichen in dem letzen Schritt erhält man sicher mehr, da der Gegner einem entgegenkommt