15.06.2004

Lemma 1 (1-Schritt-Abweichung 1SA, engl. „one deviation property“, ODP):
Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ein extensives Spiel mit perfekter Information mit endlichem Horizont. Das Strategieprofil s^* ist ein TPG von Γ gdw für jeden Spieler $i \in N$ und jede Historie $h \in H$ mit $P(h) = i$ gilt:

$$u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h)) \geq u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s_i))$$

für jede Strategie s_i des Spielers i im Teilspiel $\Gamma(h)$, *die sich von $s^*_i|_h$ nur in der Aktion unterscheidet, die direkt nach der initialen Historie von $\Gamma(h)$ vorgeschrieben wird.*

Beweis:

Falls s^* ein TPG ist, gilt die Eigenschaft natürlich. Sei s^* also ein Strategieprofil, das kein TPG ist. Zu zeigen ist, dass die Eigenschaft dann verletzt ist.

Für beliebige nicht-terminale Historien h bezeichnen wir mit $D(h,i)$ die Menge derjenigen Strategien für Spieler $i \in N$, durch die er sich im Teilspiel $G(h)$ gegenüber s^*_i verbessen könnte, d.h. die Menge der Strategien s_i für $G(h)$, für die gilt:

$$u_{i|h}(O_h(s^*_{-i|h}, s_i)) > u_{i|h}(O_h(s^*{}_{|h})).$$

Da s^* kein TPG ist, gibt es ein Paar (h,i), für das $D(h,i) \neq \varnothing$ gilt. Wir wählen speziell h und i so, dass die Historie h maximale Länge hat. Dies ist möglich, da das Spiel einen endlichen Horizont hat. Wähle nun $s_i \in D(h,i)$ beliebig.

Für alle echten Teilspiele $G(h,h')$ von $G(h)$ muss gelten, dass $s^*_{i\,|(h,h')}$ mindestens denselben Nutzen für Spieler i erreicht wie $s_{i|h'}$, denn sonst hätte man anstelle von h die längere Historie (h,h') wählen können. Da sich ein Spieler in $G(h)$ nicht verschlechtern kann, indem er seinen Nutzen in einem Teilspiel verbessert, können wir somit $s_i(h') = s^*_i(h,h')$ für alle $h' \in H_{|h} \setminus \{\langle\rangle\}$ setzen und die modifizierte Strategie liegt immer noch in $D(h,i)$. Damit ist die modifizierte Strategie eine profitable Abweichung von $s^*_{i\,|h}$, die sich von dieser nur auf der leeren Historie unterscheidet.

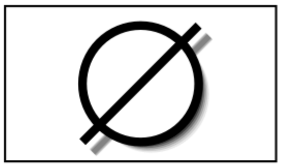
□

Beweis:

Falls s^* ein TPG ist, gilt die Eigenschaft natürlich.

Umgekehrt: Annahme s^* ist kein TPG.

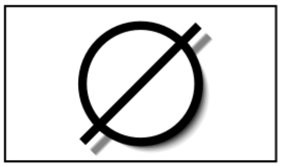
Zu zeigen: es existiert eine Historie h, die die obige Bedingung verletzt.
Da s^* kein TPG ist, gibt es eine Historie h, so dass eine profitable Abweichung s_i in $\Gamma(h)$ existiert. Die Anzahl der Historien h', so dass $s_i(h') \neq s^*_i|_h(h')$ kann durch die Länge von $\Gamma(h)$ beschränkt werden.



Wähle profitable Abweichung in $\Gamma(h)$, so dass die Anzahl der Historien h' mit $s^*_i(h') \neq s_i(h')$. Sei h^* die längste Historie von Historien h' in $\Gamma(h)$ so dass $s_i(h') \neq s^*_i|_h(h')$ ist.
Dann ist die initiale Historie in $\Gamma(h,h^*)$ die einzige, an der $s_{i|h^*}$ sich von $s^*_i|_{(h,h^*)}$ unterscheidet.
Ausserdem muss die Abweichung profitabel sein, da wir s_i mit minimal vielen Abweichungen gewählt haben.

□

Gegenbeispiel für Spiele ohne endlichen Horizont.
Ein-Spieler-Spiel



$$s_i(h) = D \qquad \forall h \in H$$

Satz 1 (Theorem von Kuhn):
Jedes endliche extensive Spiel mit perfekter Information hat ein Teilspiel-perfektes Gleichgewicht.

Beweis:

Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ein endliches extensives Spiel mpI. Konstruktion eines TPGs durch Induktion über die Länge der Teilspiel $\ell(h)$. Ausserdem parallele Konstruktion von Funktion $R : h \mapsto h'$ $h \in H$, $(h, h') \in Z$, wobei h' eine Historie für $\Gamma(h)$ ist.

Falls $\ell(\Gamma(h)) = 0$, dann ist $R(h) = \langle\rangle$.
Sei $R(h)$ definiert für alle $h \in H$ mit $\ell(\Gamma(h)) \leq k$. Betrachte nun $h^* \in H$ $\ell(\Gamma(h^*)) = k + 1$ und $P(h^*) = i$.
Es muss gelten $\ell(\Gamma(h^*, a)) \leq k$
für alle $a \in A(h^*)$
Definiere $s_i(h^*)$ als u_i-Maximierer für $(h^*, a, R(h^*, a))$ über $a \in A(h^*)$ und setze $R(h^*) = (s_i(h^*), R(h^*, s_i(h^*)))$.
Per Induktion erhalten wir dabei ein Strategieprofil, das die 1SA-Eigenschaft erfüllt.
D.h. mit dem vorigen Lemma folgt, dass das Strategieprofil ein TPG ist.

$\square$

Gegenbeispiel wenn Endlichkeit nicht gegeben:

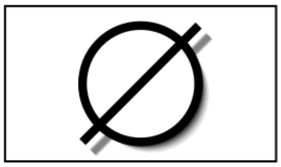
1. Endlicher Horizont, aber unendliche Verzweigung:

   (Anm: Auszahlung unendlich viele Aktionen mit Auszahlung im Intervall $[0, 1[$, wobei jede Aktion eine andere Auzahlung besitzt)

2. Unendlicher Horizont, aber endlich viele Verzweigungen:

   (Anm: u_i = Anzahl der gemachten Schritte)

Kuhns Satz sagt nichts über die Eindeutigkeit aus.



Falls keine zwei Historien von einem Spieler gleich bewertet werden, dann ist das TPG eindeutig.