08.06.2004

Kapitel 4

Extensive Spiele mit perfekten Informationen

Motivation: In Spielen hat man oft mehrere Züge hintereinander.

Spiel: Das Spiel ist dann beschrieben durch einen Spielbaum.
Eine Strategie ist keine Aktion.

Strategie: Für jeden Entscheidungspunkt im Spielbaum wird vorgeschrieben, welche Aktion gewählt wird.

$\rightsquigarrow$ Die extensive Form eines Spiels kann man in die strategische Form übersetzen, in welcher man dann die Nash-Gleichgewichte bestimmen kann.

4.1. Formalisierung von extensiven Spielen

Definition 1 (extensive Spiele mit perfekter Information):
Ein **extensives Spiel mit perfekter Information (mpI)** (Anm: alle Spieler haben zu allen Zeitpunkten alle Informationen, die sie benötigen, um ihre Entscheidung zu treffen) hat folgende Komponenten:

- Eine endliche nicht leere Menge N (Spieler)
- Eine Menge H (**Historien**) von Sequenzen mit folgenden Eigenschaften:
  - die leere Sequenz $\langle\rangle$ gehört zu H
  - Falls $\langle a^1, \dots, a^k \rangle \in H$ (wobei $k = \infty$ sein kann) und $l < k$, dann $\langle a^1, \dots a^l \rangle \in H$
  - Falls für eine unendliche Sequenz $\langle a^i \rangle_{i=1}^{\infty}$ gilt, dass $\langle a^i \rangle_{i=1}^{k} \in H$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann gilt $\langle a^i \rangle_{i=1}^{\infty} \in H$.

  Alle unendliche Sequenzen und alle Sequenzen $\langle a^i \rangle_{i=1}^{k} \in H$ mit $\langle a^i \rangle_{i=1}^{k+1} \notin H$ für beliebiges heißen terminale Historien. Die Menge der terminalen Historien heißt Z.
  Elemente einer Historie heißen **Aktionen**
- Funktion $P : H \setminus Z \to N$ (Spielerfunktionen)

  (Anm: bestimmt, wer nach einer Historie als nächster am Zug ist)
- Funktionen: $u_i : Z \to \mathbb{R}$ (Auszahlungsfunktionen)

Wenn H endlich ist, dann ist das Spiel endlich.

Falls die länge der Historien beschränkt ist, dann hat das Spiel einen **endlichen Horizont**.

Notation: Sei $h = \langle a^1, \ldots a^k \rangle$ und Aktion a dann ist $(h, a) = \langle a^1, \ldots, a^k, a \rangle$.

Falls $h' = \langle b^1, \ldots, b^l \rangle$, dann ist $(h, h') = \langle a^1, \ldots, a^k, b^1, \ldots, b^l \rangle$.

Intuition: Nach jeder Historie $h \in H$ kann der Spieler $P(h)$ eine Aktion aus:

$$A(h) = \{a \mid (h, a) \in H\}$$

wählen.
Beispiel:

Verteilung zweier Dinge.
Spieler 1 schlägt vor, Spieler 2 akzeptiert den Vorschlag oder lehnt ihn ab.
Wenn Spieler 2 akzeptiert, werden die Dinge so aufgeteilt, wie von Spieler 1 vorgeschlagen, ansonsten erält keiner etwas.
Darstellung als Spielbaum:

1

(2,0) (1,1) (0,2)

(2j0) (0n0) (1j1) (0n0) (0j2) (0n0)

In der Schreibweise der der Definition:
$N = \{1, 2\}$

$H = \{\langle\rangle, \langle(2,0)\rangle, \langle(1,1)\rangle, \langle(0,2)\rangle, \langle(2,0), y\rangle, \langle(2,0), n\rangle, \ldots\}$

$P(\langle\rangle) = 1$

$P(h) = 2$ für $h \neq \langle\rangle$

$u_1(\langle(2,0), j\rangle) = 2$

$u_2(\langle(2,0), j\rangle) = 0$

...

4.2. Strategien

Definition 1:
Eine **Strategie** eines Spielers i in einem extensiven Spiel mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ist eine Funktion s_i, die jeder Historie $h \in H$ mit $P(h) = i$ eine Aktion aus $A(h) = \{a \mid (h, a) \in H\}$ zuweist.

Notation (für endliche Spiele): Strategie wird notiert, als Sequenz von Aktionen an Entscheidungspunkten, die in „Breitensuch"-Reihenfolge besucht werden.

Beispiel:

Strategien für Spieler 1: AE,AF,BE,BF
Strategien für Spieler 2: C,D

Definition 2 (Ausgang oder Ergebnis):
Der **Ausgang**oder das **Ergebnis**$O(s)$ für ein Strategieprofil $s = (s_i)_{i \in N}$ ist die, möglicherweise unendliche, Historie, $h = \langle a^1, \dots, a^k \rangle$, für die gilt, dass für alle l mit

$$0 \leq l < k : \; s_{P(\langle a^1, \dots, a^l \rangle)}(\langle a^1, \dots a^l \rangle) = a^{l+1}$$

4.3. Nash-Gleichgewichte

Definition 1:
Ein Nash-Gleichgewicht für ein extensives Spiel mit perfekter Information $\langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ist ein Strategieprofil s^*, so dass für jeden Spieler $i \in N$ gilt:

$$u_i(O(s^*_{-i}, s^*_i)) \geq u_i(O(s^*_{-i}, s_i))$$

für alle Strategien s_i.

Äquivalent kann man die strategische Form von extensiven Spielen definieren.

<u>Beispiel:</u>

s.o. $B \rightarrow (1, 2)$, $A, L \rightarrow (0, 0)$, $A, R \rightarrow (2, 1)$
strategische Form

	L	R
A	0 0	1 2
B	2 1	2 1

Nash-Gleichgewichte (B,L), (A,R) Das Nash-Gleichgewicht (B, L) ist unrealistisch: Spieler 1 spielt hier B, weil dies optimal ist, unter der Bedingung, dass Spieler 2 L spielt. Tatsächlich würde Spieler 2 jedoch in der Situation, in der er zwischen L und R entscheiden muss, niemals L spielen, da er sich dadurch selbst schlechter stellt. Man bezeichnet L daher als „leere oder „unplausible Drohung“ Ebenso beim Aufteilungsspiel: Nash-Gleichgewichte: $((2, 0), jjj)$, $((2, 0), jjn)$, $((2, 0), jnj)$, $((2, 0), jnn)$ $((1, 1), nnj)$, $((1, 1), njn)$, $((0, 2), nnj)$, $((0, 2), nnj)$, $((2, 0), nnn)$. Bis auf $((2, 0), jjj)$ und $((1, 1), njj)$ enthalten alle Nash-Gleichgewichte „leere Drohungen“

4.4. Teilspiel-perfekte Gleichgewichte

<u>Idee:</u> Man fordert, dass Gleichgewichtsstrategien in jedem Teilspiel optimal sind.

Definition 1:
Ein Teilspiel eines extensiven Spiels mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$, das nach der Historie h beginnt, ist das Spiel $\Gamma(h) = \langle N, H|_h, P|_h, (u_i|_h) \rangle$, wobei $H|_h = \{h' \;|(h, h') \in H\}$, $P|_h(h') = P(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$ und $u_i|_h(h') = u_i(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$.